procesy stochastyczne
I rok matematyki II-go stopnia
lista 2

Definicja 1. *Niech $p > 0$. Mówimy, że proces $(X_t)_{t\in T}$ jest rzędu p wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall_{t\in T} \quad E(|X_t|^p) < \infty.$$

Uwaga 1. *Proces stochastyczny rzędu 2 nazywamy procesem Hilberta.*

Definicja 2. *Wartością oczekiwaną (funkcją wartości oczekiwanej) procesu stochastycznego $(X_t)_{t\in T}$ rzędu pierwszego nazywamy funkcję m_X taką, że*

$$T \ni t \mapsto m_X(t) = E(X_t).$$

Definicja 3. *Wariancją (funkcją wariancji) procesu stochastycznego Hilberta $(X_t)_{t\in T}$ nazywamy funkcję σ_X^2 taką, że*

$$T \ni t \mapsto \sigma_X^2(t) = E(X_t).$$

Definicja 4. *Kowariancją (funkcją kowariancji) procesu stochastycznego Hilberta $(X_t)_{t\in T}$ nazywamy odwzorowanie*

$$K_X : T \times T \to \mathbb{R}$$

takie, że

$$\forall_{t,s\in T} \quad K_X(t,s) = cov(X_t, X_s) \equiv E((X_t - E(X_t))(X_s - E(X_s))).$$

Definicja 5. *Kowariancją unormowaną (funkcją kowariancji unormowanej) procesu stochastycznego Hilberta $(X_t)_{t\in T}$ nazywamy odwzorowanie*

$$\overline{K}_X : T \times T \to \mathbb{R}$$

takie, że

$$\forall_{t,s\in T} \quad \overline{K}_X(t,s) = \rho(X_t, X_s).$$

Definicja 6. *Korelacją (funkcją korelacji) procesu stochastycznego Hilberta $(X_t)_{t\in T}$ nazywamy odwzorowanie*

$$\widetilde{K}_X : T \times T \to \mathbb{R}$$

takie, że

$$\forall_{t,s\in T} \quad \widetilde{K}_X(t,s) = E(X_t X_s).$$

Uwaga 2. *Kowariancja, kowariancja unormowana oraz korelacja nazywane są też odpowiednio autokowariancją, autokowariancją unormowaną oraz autokorelacją.*

Zadania do rozwiązania

1. Dany jest proces $(U_t)_{t\geq 0}$, gdzie $U_t = At^2 - 2Bt$ i (A, B) jest wektorem losowym o rozkładzie: $P(\{A = \pm 1; B = \pm 1\}) = 0,25$. Narysować dwie przykładowe trajektorie i obliczyć charakterystyki liczbowe procesu.

2. Dany jest proces $(U_t)_{t\geq 0}$, gdzie $U_t = t^2 - Yt$. Dla ustalonego t znaleźć rozkład u_t, jeśli Y ma rozkład jednostajny na odcinku $[0, 1]$. Obliczyć charakterystyki liczbowe procesu.

3. Niech $Y \sim U[0,1]$. Dany jest proces $(U_t)_{t\geq 0}$, gdzie $U_t = Y cos(at)$, $a \in \mathbb{R}$. Obliczyć $E(U_t)$ oraz pozostałe charakterystyki liczbowe tego procesu.

4. Dany jest proces stochastyczny $(X_t)_{t>0}$, gdzie $X_t = tU+V$ oraz U i V są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym z jednakowym parametrem λ. Obliczyć charakterystyki liczbowe procesu $(X_t)_{t>0}$.

5. Dla procesu z poprzedniego zadania wyznaczyć rozkłady jednowymiarowe.

6. Zmienna losowa X ma rozkład normalny $N(m,\sigma)$, $b \in \mathbb{R}$. Podać gęstości jednowymiarowe i policzyć funkcję kowariancji procesu $(U_t)_{t\geq 0}$, gdzie $U_t = Xt + b$.

7. Dany jest proces $(Z_t)_{t\geq 0}$, gdzie $Z_t = t^2 + Xt + Y$. Obliczyć charakterystyki liczbowe procesu $(Z_t)_{t>0}$, jeśli X i Y są nieskorelowanymi zmiennymi losowymi.

8. Dany jest proces $(U_t)_{t\geq 0}$, gdzie $U_t = t^3 - Yt$, gdzie $Y \sim U[1,2]$. Obliczyć charakterystyki liczbowe tego procesu.

9. Obliczyć parametry procesu $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$, gdzie $X_t = At^2$, gdzie A jest zmienną losową skokową o funkcji prawdopodobieństwa $P(\{A = \pm 1\}) = 0,5$.

10. Obliczyć parametry procesu $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$, gdzie $X_t = At + B$, gdzie A i B są zmiennymi losowymi o parametrach: $E(A) = 0, E(B) = 1, D^2(A) = 1, D^2(B) = 2, cov(A,B) = -1$.

11. Obliczyć parametry procesu $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$, gdzie $X_t = At^2 + Be^t$, gdzie A i B to nieskorelowane zmienne losowe o parametrach: $E(A) = 2, E(B) = -3, D^2(A) = 1, D^2(B) = 3$.

12. Wyznaczyć parametry procesu $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$, gdzie $X_t = At + B$, gdzie A i B to zmienne losowe o parametrach: $E(A) = 0, E(B) = 0$ i macierzy kowariancji $K = \begin{bmatrix} 1 & 0,4 \\ 0,4 & 1,5 \end{bmatrix}$.

13. Wyznaczyć parametry procesu $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$, gdzie $X_t = At+1$. Jak wyglądają realizacje tego procesu? Które z poniższych funkcji $x_1(t) = 0,3t+1, x_2(t) = -0,3t+1, x_3(t) = 2t+1$ są realizacjami tego procesu?

14. Wyznaczyć parametry procesu $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$, gdzie $X_t = At - 3$, gdzie $A \sim N(3,1)$. Jak wyglądają realizacje tego procesu?

15. Wyznaczyć parametry procesu $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$, gdzie $X_t = \cos(t+B)$, gdzie $B \sim U(-\pi,\pi)$.

16. Wyznaczyć parametry procesu $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$, gdzie $X_t = A\sin(t+B)$, gdzie A i B to niezależne zmienne losowe takie, że $A \sim U(-0,5;0,5)$, $B \sim U(-\pi,\pi)$.

17. Proces $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ ma tylko 3 realizacje: $x_1(t) = t, x_2(t) = t+1, x_3(t) = t+2$. Realizacje te są przyjmowane odpowiednio z prawdopodobieństwami $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$. Wyznaczyć parametry tego procesu.