ćwiczenia z rachunku prawdopodobieństwa
informatyka i ekonometria, II rok
lista 2

1. Rzucamy 3 razy monetą. Opisać przestrzeń probabilistyczną odpowiadającą temu doświadczeniu (co to są Ω, Σ, P?).
2. Rzucamy 5 kostkami do gry. Wypisać wszystkie zdarzenia elementarne. Czy możemy to zrobić w rozsądnym czasie. Jak inaczej opisać zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych?
3. Cyfry $0, 1, 2, \ldots, 9$ ustawiono losowo. Jakie jest prawdopodobieństwo, że
   a) między 0 i 1 znajdują się dokładnie cztery cyfry?
   b) $7, 8$ i 9 będą stały obok siebie?
4. Rzucamy dwiema kostkami. Obliczyć prawdopodobieństwo, że iloczyn liczb równych wyrzuconym oczkom jest liczbą parzystą.
5. W urnie są 2 kule białe i 4 czarne. Losujemy 2 kule bez zwracania. Co jest bardziej prawdopodobne, wyciągnięcie kul
   a) tego samego koloru;
   b) różnych kolorów?
6. W urnie znajdują się kule białe i czarne. Udowodnić, że prawdopodobieństwo wylosowania ze zwracaniem dwóch kul tego samego koloru jest nie mniejsze niż 0,5.
7. W n rozróżnialnych komórkach rozmieszczono losowo r nierozróżnialnych cząstek, zakładamy, że wszystkie możliwe rozmieszczenia są jednakowo prawdopodobne. Obliczyć prawdopodobieństwo, że
   a) ustalona komórka zawiera dokładnie k cząstek ($k < r$);
   b) dokładnie m komórek zostało pustych ($m < n$);
   c) w każdej komórce są conajmniej dwie cząstki ($r \geq 2n$).
8. Na ile sposobów można k jednozłotówek i m pięciozłotówek rozmieścić w n ponumerowanych kasetkach?
9. Rzucamy n kostkami, obliczyć prawdopodobieństwo wyrzucenia n_1 jedynek, n_2 dwójek, $\ldots, n_6$ szóstek, gdzie $\sum_{i=1}^{6} n_i = n$.
10. Z 52 kart wylosowano 6. Jaka jest szansa, że wśród wylosowanych kart będą karty czerwone i czarne?
11. Z 52 kart losujemy 3. Obliczyć prawdopodobieństwo, że wśród wylosowanych kart jest przynajmniej jeden as.
12. Przy okrągłym stole usiadło dziesięć dziewcząt i dziesięciu chłopców. Jaka jest szansa, że osoby tej samej płci nie siedzą obok siebie? Jakie jest prawdopodobieństwo, że trzy ustalone osoby będą siedziały obok siebie?
13. W zbiorze $2n$ osób ($n \geq 1$) wyróżniono dwie. Czy bardziej prawdopodobne jest, że siadając losowo wokół stołu przy którym jest $2n$ miejsc, wyróżnione osoby znajdą się obok siebie, czy na przeciw?
14. Pięć zesztów wrzucamy do trzech szuflad. Co jest bardziej prawdopodobne
   a) w pewnej szufladzie będą co najmniej trzy zeszyty;
   b) co najmniej jedna szuflada będzie pusta?
15. (problem roztargnionej sekretarki) Do n zaadresowanych kopert włożono w sposób losowy n listów do różnych adresatów. Wyznaczyć prawdopodobieństwo, że chociaż jeden list trafi do właściwej koperty. Wyznaczyć granicę tego prawdopodobieństwa gdy $n \to \infty$.

zadania do samodzielnego rozwiązania:

1. Rzucamy dwiema kostkami. Obliczyć prawdopodobieństwo, że suma liczb równych wyrzuconym oczkom wynosi co najmniej 5.
2. Z 52 kart wylosowano 13. Jaka jest szansa, że wśród wylosowanych kart będą reprezentowane wszystkie wartości?

3. Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, \ldots, 150\}$ losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania liczby podzielnej

   a) przez 10;
   b) przez 4;
   c) przez 10 i przez 4;
   d) przez 10 lub przez 4.

4. Ze zbioru $A = \{1, 2, 3, \ldots, 102\}$ losujemy dwie liczby. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że suma wylosowanych liczb jest podzielna przez 3.

5. Winda rusza z siedmioma pasażerami i zatrzymuje się na 10 piętrach. Jakie jest prawdopodobieństwo, że każdy z pasażerów wysiądzie na innym piętrze?

6. Z urny zawierającej n kul, w tym 6 białych, losujemy kolejno dwie kule bez zwracania. Dla jakich wartości n prawdopodobieństwo wylosowania dwóch białych kul bedzie większe od 0,25?

7. Niech P_1 i P_2 będą prawdopodobieństwami określonymi na σ-ciele Σ podzbiorów Ω. Udowodnić, że funkcja

$$P(A) = \frac{1}{3}P_1(A) + \frac{2}{3}P_2(A)$$

   spełnia aksjomaty prawdopodobieństwa.