ćwiczenia z rachunku prawdopodobieństwa
matematyka, III rok
lista 2

1. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład prawdopodobieństwa określony następująco: $P(X = 1, Y = 1) = 0,2$, $P(X = 1, Y = 2) = 0,3$, $P(X = 3, Y = 1) = 0,4$, $P(X = 3, Y = 2) = 0,1$.
   - Zapisać ten rozkład w tabeli,
   - zbadać czy zmienne losowe X i Y są niezależne,
   - wyznaczyć dystrybuantę i wartość przeciętną zmiennej losowej X,
   - obliczyć wartość dystrybuanty dwuwymiarowej zmiennej losowej (X, Y) w punkcie $(2, 2)$.
2. W 10-cio elementowej partii pewnego towaru są 2 sztuki wadliwe. Wylosowano bez zwrotu 2 sztuki. Niech zmienna losowa X przyjmuje wartości równe liczbie sztuk wadliwych wśród 2 wylosowanych sztuk, zaś Y przyjmuje wartość 1, jeśli pierwsza wylosowana sztuka jest wadliwa, oraz 0, jeśli nie jest wadliwa.
   - Wyznaczyć rozkład dwuwymiarowej zmiennej losowej (X, Y),
   - zbadać czy zmienne losowe X i Y są niezależne,
   - obliczyć współczynnik korelacji zmiennych X i Y.
3. Rzucamy kolejno 5 razy monetą. Oznaczmy przez X liczbę wyrzuconych orłów, przez Y liczbę serii orłów, a przez Z długość najdłuższej serii.
   - Wyznaczyć rozkłady dwuwymiarowych zmiennych losowych (X, Y) , (X, Z) oraz (Y, Z),
   - wyznaczyć rozkłady brzegowe poszczególnych zmiennych losowych,
   - obliczyć $P(X = 3, Z \leq 2)$,
   - wyznaczyć rozkład trzywymiarowej zmiennej losowej (X, Y, Z).
4. Zmienne losowe X i Y są niezależne i mają rozkład jednostajny odpowiednio na przedziałach $(0, a)$ i $(0, \frac{1}{2}\pi)$. Znaleźć $P(X < b \cos Y)$, gdzie $0 < b < a$.
5. Jakie jest prawdopodobieństwo, że równanie $x^2 - 2Bx + C = 0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste, jeśli B i C są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $Exp(\lambda)$?
6. Momenty przybycia autobusów A i B są niezależnymi zmiennymi losowymi X, Y o rozkładzie wykładniczym z parametrami α i μ
   a) znaleźć rozkład momentu przybycia pierwszego autobusu;
   b) obliczyć prawdopodobieństwo, że autobus A przyjedzie pierwszy.
7. Dana jest funkcja
   $$f(x, y) = ce^{-\frac{1}{2}(x^2+2xy+5y^2)}$$
   - wyznaczyć stałą c tak, aby dana funkcja byłą gęstością zmiennej losowej (X, Y),
   - wyznaczyć rozkłady brzegowe,
   - czy zmienne losowe X i Y są niezależne?
8. Dana jest gęstość prawdopodobieństwa układu zmiennych losowych (X, Y)
   $$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sin(x + y) & \text{dla} \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, 0 < y < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{w.p.p.,} \end{cases}$$
   - wyznaczyć dystrybuantę układu,
   - wyznaczyć rozkłady brzegowe,
   - zbadać czy zmienne losowe są niezależne.
9. Niech dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład jednostajny na K, gdzie $K = \{(x, y) \in R^2 : |x|+|y| \leq a\}$. Czy zmienne losowe X i Y są niezależne?

10. Trójwymiarowa zmienna losowa (X, Y, Z) ma rozkład równomierny w obszarze $V = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 4 \text{ i } 0 \leq z \leq 1\}$. Wyznaczyć gęstość rozkładu brzegowego zmiennej losowej Z oraz obliczyć wartość oczekiwaną $E(Z)$, czy zmienne losowe X, Y oraz Z są niezależne?

11. Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład określony gęstością:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{4}{xy^3} & \text{dla} \quad a < x < y < \infty \\ 0 & \text{w.p.p} \end{cases}$$

- sprawdzić dla jakiego a podana funkcja jest gęstością,
- znaleźć dystybuantę,
- znaleźć gęstości rozkładów brzegowych,
- sprawdzić czy zmienne X i Y są niezależne,
- policzyć wartości przeciętne rozkładów brzegowych.

12. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma gęstość daną wzorem

$$f(x, y) = \begin{cases} A & \text{dla} \quad (x, y) \in V \\ 0 & \text{w.p.p} \end{cases}$$

gdzie V jest obszarem ograniczonym półokręgiem o promieniu 1, położonym nad osią Ox. Obliczyć $E(XY)$

13. Dwie niezależne zmienne losowe X i Y mają rozkłady normalne $N(m, \sigma)$ z takimi samymi parametrami. Znaleźć współczynnik korelacji zmiennych losowych $U = aX + bY$ i $V = aX - bY$.

14. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma gęstość daną wzorem

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{12}{11}(2x^2 + xy) & \text{dla} \quad (x, y) \in (0, 1) \times (0, 1) \\ 0 & \text{w.p.p} \end{cases}$$

Obliczyć współczynnik korelacji.

15. Niech S będzie trójkątem ograniczonym prostymi $y = -x$, $y = x$ oraz $y = 1$. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma gęstość daną wzorem

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad (x, y) \in S \\ 0 & \text{w.p.p} \end{cases}$$

- obliczyć kowariancję $Cov(X, Y)$,
- obliczyć współczynnik korelacji zmiennych losowych X, Y
- czy zmienne losowe X i Y są niezależne?

16. Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi i mają rozkład

- jednostajny na przedziale $[\alpha, \beta]$
- równomierny dwupunktowy $W_{X_i} = \{1, 2\}$

Niech $U = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, natomiast $V = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Wyznaczyć rozkład dwuwymiarowej zmiennej losowej (U, V).

17. Niech $F(x, y)$ będzie dystrybuantą dwuwymiarowej zmiennej losowej (X, Y), a $G(x, y)$ będzie dystrybuantą dwuwymiarowej zmiennej losowej (U, V), gdzie $U = \max(X, Y)$ oraz $V = \min(X, Y)$. Wyrazić $G(x, y)$ przez $F(x, y)$