matematyka w ubezpieczeniach
III rok matematyki finansowej
lista 3

1. Pokazać, że
$$\mathring{e}_x \leq \mathring{e}_{x+1} + 1.$$

2. Pokazać, że
$$\frac{d}{dx}\,{}_tp_x = {}_tp_x(\mu_x - \mu_{x+t}).$$

3. Jeśli $s(x) = (1 - \frac{x}{100})^{\frac{1}{2}}$ gdzie $0 \leq x \leq 100$
oblicz:

   a) $\mu(36)$;
   b) $E(T(36))$.

4. Wiedząc, że dystrybuanta przyszłego czasu życia noworodka w pewnej populacji dana jest wzorem
$$F(x) = 1 - \frac{1}{1+x}, \quad x \geq 0,$$
wyznacz μ_x.

5. Znając ${}_tp_x = \frac{100-x-t}{100-x}$ dla $0 \leq x \leq 100$ oraz $0 \leq t \leq 100 - x$ obliczyć μ_{45}.

6. Niech $\mu(x) = 0,001$ dla $20 \leq x \leq 25$ obliczyć ${}_{2|2}q_{20}$.

7. Wiedząc, że natężenie wymierania pewnej populacji dane jest wzorem
$$\mu_x = \frac{3}{100-x} \quad 0 \leq x \leq 100$$
oblicz:

   a) ${}_{10}p_{50}$
   b) ${}_{12}q_{50}$
   c) ${}_{10|5}q_{50}$
   d) $s(50)$

8. Wiedząc, że natężenie wymierania pewnej populacji określone jest funkcją
$$\mu_x = \begin{cases} \frac{3}{110-x} & \text{dla } 0 \leq x < 50 \\ \frac{2,5}{100-x} & \text{dla } 50 \leq x < 100 \end{cases}$$

   a) wyznaczyć ${}_tp_x$, $\quad 0 \leq t \leq 100 - x, \quad 0 \leq x \leq 100$
   b) obliczyć $\mathring{e}_{30}$

9. Zakładając, że natężenie śmiertelności jest stałe dla $x \geq 50$ oraz $\mathring{e}_{50} = 40$, obliczyć p_{60}.

10. Ubezpieczyciel zakłada, że natężenie zgonów w przypadku palaczy jest w każdym wieku dwukrotnie wyższe niż natężenie zgonów osób niepalących. Wykazać, że

$$ {}_tp_x^* = ({}_tp_x)^2, $$

gdzie ${}_tp_x^*$ oznacza prawdopodobieństwo przeżycia osób palących.

11. Wyznacz prawdopodobieństwo przeżycia przez osobę 55-letnią co najmniej 10 lat, jeśli analogiczne prawdopodobieństwo dla osoby 25-letniej wynosi 0,8 oraz natężenie zgonów opisuje funkcja

$$ \mu_x = kx \quad \text{dla } x > 0 $$

$A)\ 0,40 \quad B)\ 0,64 \quad C)\ 0,80 \quad D)\ 0,81 \quad E)\ 0,90$

12. W danej populacji śmiertelnością rządzi prawo Weibulla z intensywnością wymierania

$$ \mu_{x+t} = k \cdot (x+t), \qquad k > 0. $$

Oblicz $\frac{SD(T(0))}{E(T(0))}$ (SD oznacza odchylenie standardowe). Podaj najbliższą wartość.
$A)\ 0,47 \quad B)\ 0,52 \quad C)\ 0,57 \quad D)\ 0,62 \quad E)\ 0,67.$

13. W danej populacji śmiertelnością rządzi prawo de Moivre'a z wiekiem granicznym ω. O wieku x wiadomo, że osoby starsze w tym wieku umierają w ciągu doby dwa razy rzadziej niż osoby dwukrotnie starsze. Oblicz prawdopodobieństwo, że osoba w wieku x dożyje wieku $2x$.
$A)\ \frac{1}{4} \quad B)\ \frac{1}{3} \quad C)\ \frac{1}{2} \quad D)\ \frac{2}{3} \quad E)\ \frac{3}{4}$