**procesy stochastyczne**
**I rok matematyki II-go stopnia**
**lista 3**

1. Pokazać, że $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ jest najmniejszą filtracją taką, że ciąg $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest adoptowany do filtracji $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. Niech $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie filtracją. Pokazać, że następujące warunki są równoważne

   a) $\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$,

   b) $\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

3. Niech $\tau$ będzie momentem stopu względem filtracji $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Zbadaj, czy następujące zmienne losowe też są momentami stopu względem filtracji $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

   a) $\tau - 1$;

   b) $\tau + 1$;

   c) $\tau^2$;

   d) $\sqrt{\tau}$.

4. Rozważ poprzednie zadanie dla filtracji $\{\mathcal{F}_t : t \in [0, \infty)\}$.

5. Udowodnij, że zmienna losowa $\tau \equiv a$ jest momentem stopu względem dowolnej filtracji.

6. Niech $\tau_1, \tau_2$ będą momentami stopu względem filtracji $(\mathcal{F}_n)_{t\in T}$. Udowodnić, że wówczas $\tau_1 \vee \tau_2$ oraz $\tau_1 \wedge \tau_2$ są również momentami stopu względem filtracji $(\mathcal{F}_n)_{t\in T}$.

7. Niech $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem zmiennych losowych adaptowanych względem filtracji $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   a) Udowodnić, że chwila pierwszej wizyty ciągu $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ w zbiorze $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ jest momentem stopu.

   b) Niech $\tau$ będzie momentem stopu względem filtracji $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Udowodnić, że chwila pierwszej wizyty ciągu $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ w zbiorze $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ po chwili $\tau$ jest momentem stopu.

   c) Udowodnić, że chwila $k$-tej wizyty ciągu $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ w zbiorze $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ jest momentem stopu.

8. Rzucamy monetą. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą zmiennymi losowymi, określonymi następująco - zmienna losowa $X_i$ przyjmuje wartość 1 jeśli w $i$-tym rzucie wypadła reszka, -1 w przeciwnym przypadku. Zbadaj, czy następujące zmienne losowe są momentami stopu względem naturalnej filtracji $\mathcal{F}_k = \sigma(X_1, \ldots, X_k), k = 1, 2, \ldots$.

   a) $\tau = 1$;

   b) $\tau = \inf\{n \in \mathbb{N} : X_1 + X_2 + \ldots + X_n = 2\}$;

   c) $\tau = \inf\{n \in \mathbb{N} : X_1 + X_2 + \ldots + X_n \geq 2\}$;

   d) $\tau = \inf\{n \in \mathbb{N} : X_{n+1} = -1\}$

   e) $\tau = \inf\{n \in \mathbb{N} : X_n = -1\}$;

   f) $\tau = \inf\{n \in \mathbb{N} : X_{n-1} = -1\}$;

   g) $\tau + 1$, gdzie $\tau$ jest równe ilości reszek w pierwszym rzucie

9. Niech $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\bigcup_{t\in T})$ oraz $\tau$ - $(\mathcal{F}_t)$-moment stopu. Zdefiniujmy rodzinę zdarzeń obserwowalnych do chwili $\tau$

$$\mathcal{F}_\tau := \{A \in \mathcal{F}_\infty : \forall_{t\in T} A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}.$$

Pokazać, że

a) $\mathcal{F}_\tau$ jest $\sigma$-ciałem;

b) jeśli $t_0 \in T$ oraz $\tau t_0$, to $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_{t_0}$;

c) jeśli $tau \leq \sigma$, gdzie $\sigma$ jest $(\mathcal{F}_t)$-momentem stopu, to $\mathcal{F}_\tau \subset \mathcal{F}_\sigma$;

d) $\mathcal{F}_{\tau\wedge\sigma} = \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\sigma$.