procesy stochastyczne
lista 3

1. Rozważmy proces
$$X_t(\omega) = U(\omega), \quad t \in T, \quad U - \text{zmienna losowa}$$
Obliczyć:
   a) $E(X_t)$, $K_X(t_1, t_2)$, $D^2(X_t)$, jeżeli znane są $E(U) = m, D^2(U) = \sigma^2$;
   b) jednowymiarową gęstość i dwuwymiarową dystrybuantę procesu, jeżeli dana jest gęstość $\varphi(u)$ zmiennej losowej U.

2. Rozważmy proces $\{X_t = U \cdot t + V,\ t \in (0, +\infty)\}$. Wyznaczyć:
   a) $E(X_t)$, $K_X(t_1, t_2)$, jeżeli U jest zmienną losową dyskretną o rozkładzie $P(U = k) = p_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n$, $p_k \geq 0, \quad \sum_{k=1}^{n} p_k = 1, \quad V = 0$;
   b) $E(X_t), K_X(t_1, t_2), D^2(X_t)$ oraz jednowymiarową gęstość procesu, jeżeli U jest zmienną losową o rozkładzie normalnym $N(m, \sigma)$ oraz $V = v$ jest wielkością nielosową;
   c) $E(X_t), K_X(t_1, t_2), \tilde{K}_X(t_1, t_2), D^2(X_t)$, jeżeli U, V są zmiennymi losowymi niezależnymi o znanych parametrach. Jaką postać ma gęstość prawdopodobieństwa procesu, jeśli znane są gęstości prawdopodobieństwa zmiennych losowych U i V: $f_U(u), f_V(v)$;
   d) $E(X_t), K_X(t_1, t_2), D^2(X_t)$, jeżeli U i V są zmiennymi losowymi, o których wiadomo, że rozkład dwuwymiarowej zmiennej losowej (U, V) jest rozkładem normalnym $N(m_U, m_V, \sigma_U, \sigma_V, \rho)$.

3. Rozważmy proces stochastyczny
$$X_t = \varphi(t, U),$$
gdzie:

   φ - funkcja rzeczywista nielosowa klasy $C(R)$,

   t - czas,

   U - zmienna losowa o znanym rozkładzie.

   Obliczyć $E(X_t), K_X(t_1, t_2), D^2(X_t)$, gdy:
   a) $\varphi(t, U) = \alpha(t)U + \beta(t), \alpha(t), \beta(t)$ są funkcjami nielosowymi i znana jest gęstość zmiennej losowej U;
   b) $\varphi(t, U) = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i(t) U_i; \quad \varphi_i$ - są funkcjami nielosowymi, dla $i = 1, 2, \ldots, N$, U_i - elementy N-wymiarowej Zmiennej losowej $U = (U_1, U_2, \ldots, U_N)$ o znanych $E(U_i) = m_i$, i macierzy kowariancyjnej $[b_{ik}]$, gdzie $b_{ik} = cov(U_i, U_k)$ dla $i, k = 1, 2, \ldots, N$.

4. Rozważmy proces stochastyczny opisujący drgania sinusoidalne, który zapisuje się w postaci:
$$X_t = U_1 \cos(\Psi t) + U_2 \sin(\Psi t), \quad t \in T,$$
gdzie U, Φ, Ψ - zmienne losowe oraz $U_1 = U \sin(\Phi),\ U_2 = U \cos(\Phi)$.
   a) podać jedno- i dwuwymiarową dystrybuantę procesu, jeśli: $T = [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$, U jest zmienną losową rozkładzie jednostajnym na przedziale $[0, 1]$, $\Psi \equiv 1, \Phi \equiv 0$;
   b) podać wartość oczekiwaną procesu, jeśli (U, Ψ) jest zmienną losową dwuwymiarową o rozkładzie jednostajnym na obszarze $[0, 1] \times [0, 1]$, a $\Phi \equiv 0$ jest wielkością nielosową;
   c) zbadać, czy proces jest stacjonarny, jeżeli $E(U) = 0$, $D^2(U) = \sigma_U^2$, Φ jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na $[0, 2\pi]$, $\Psi = a > 0$ jest wielkością nielosową, U, Φ są zmiennymi losowymi niezależnymi.