ćwiczenia z rachunku prawdopodobieństwa
matematyka, III rok
lista 3 (nie tylko klasyczna definicja prawdopodobieństwa)

1. Własności prawdopodobieństwa wraz z dowodami.
2. Niech $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Znaleźć najmniejszą σ-algebrę Σ zawierającą rodzinę $\mathcal{R} = \{\{1\}, \{1, 3, 5\}, \{5\}\}$.
3. Niech $\Omega = [0, 1]$ oraz niech Σ będzie pewną σ-algebrą podzbiorów odcinka $[0, 1]$. Udowodnić, że funkcja
$$P(A) = \begin{cases} 1 & \text{gdy} \quad \frac{1}{2} \in A \\ 0 & \text{gdy} \quad \frac{1}{2} \notin A \end{cases}$$
określona na zbiorach $A \in \Sigma$ spełnia aksjomaty prawdopodobieństwa.
4. Rzucamy symetryczną monetą do chwili wyrzucenia orła. Skonstruować zbiór zdarzeń elementarnych i określić odpowiednie prawdopodobieństwa. Jaka jest szansa, że liczba rzutów będzie parzysta? podzielna przez 3? podzielna przez m?
5. Jakie jest prawdopodobieństwo, że sześcian losowo wybranej liczby spośród liczb od 0 do 999 kończy się na 11?
6. Ile liczb należy wylosować ze zbioru $\{0, 1, \ldots, 9\}$, aby prawdopodobieństwo wystąpienia wśród nich liczby 7 był nie mniejsze niż 0,9 ? Uwzględnić schemat losowania ze zwracaniem i bez zwracania.
7. Ze zbioru liczb od 1 do 10 wybieramy kolejno dwie (bez zwracania) i od pierwszej odejmujemy drugą. Jakie jest prawdopodobieństwo, że ich różnica będzie większa od 2.
8. Ze zbioru X, gdzie $X = \{1, \ldots, n\}, (n \geq 2)$, losujemy kolejno dwie liczby. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że pierwsza z wylosowanych liczb jest większa od drugiej.
9. Obliczyć prawdopodobieństwo, że dwa losowo wybrane wierzchołki sześcianu jednostkowego będą odległe o więcej niż 1.

zadania do samodzielnego rozwiązania:

1. **[E.A 26.10.1996/zad.3]**
Oblicz $P(\min\{k_1, k_2, k_3\} = 3)$ jeśli k_1, k_2, k_3 to liczby oczek uzyskane w wyniku rzutu trzema uczciwymi kostkami do gry.
A) $\frac{36}{216}$, B) $\frac{37}{216}$, C) $\frac{38}{216}$, D) $\frac{39}{216}$, E) $\frac{40}{216}$.
2. **[E.A 5.04.1997/zad.1]**
W pierwszej urnie znajdują się kule ponumerowane liczbami $1, 2, \ldots, 10$, zaś w drugiej urnie - kule ponumerowane liczbami $6, 7, \ldots 25$. Wyciągamy losowo po jednej kuli z każdej urny. Prawdopodobieństwo, że obie kule mają ten sam numer jest równe:
A) $\frac{1}{2}$, B) $\frac{1}{5}$, C) $\frac{1}{10}$, D) $\frac{1}{40}$, E) $\frac{1}{50}$.
3. **[E.A 21.06.1997/zad.1]**
Jakie jest prawdopodobieństwo, że w dobrze potasowanej talii (52 kart) wszystkie cztery asy sąsiadują ze sobą (nie są rozdzielone innymi kartami)?
A) $\binom{52}{4}^{-1}$, B) $\binom{52}{3}^{-1}$, C) $\frac{4}{52}$, D) $\frac{4!}{52 \cdot 51 \cdot 50}$, E) $\frac{1}{48!}$.
4. **[E.A 13.04.2002/zad.1]**
Talia kart składa się z 16 figur i 36 blotek. Dobrze potasowane karty rozdajemy czterem graczom, każdemu po 13. Jakie jest prawdopodobieństwo p, że każdy gracz otrzyma 4 figury i 9 blotek?
A) $p = \frac{\binom{13}{4}^4}{\binom{52}{16}}$, B) $p = \frac{\binom{16}{4}^4}{\binom{52}{13}}$, C) $p = \frac{\binom{13}{4}\binom{9}{4}\binom{5}{4}}{\binom{52}{16}\binom{36}{16}\binom{20}{16}}$, D) $p = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13}{16^4}$, E) $p = \frac{1}{\binom{13}{4}^4}$.
5. **[E.A 17.05.2003/zad.3]**
Wykonujemy cztery rzuty kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo, że liczby oczek otrzymane w kolejnych rzutach tworzą ciąg ściśle rosnący.
A) $\frac{4}{6}$, B) $\frac{2}{6}$, C) $\frac{1}{6^4}\binom{6}{4}$, D) $\frac{4!}{6^4}$, E) $\frac{4!}{6!}$.