

ćwiczenia z rachunku prawdopodobieństwa  
matematyka, III rok  
lista 3

1. Dwuwymiarowa zmienna losowa  $(X, Y)$  ma rozkład o gęstości:

$$f(x, y) = \frac{1}{300\pi} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-30)^2}{100} + \frac{(y-40)^2}{225}\right]\right\}$$

Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że suma kwadratów standaryzowanych zmiennych losowych  $X$  i  $Y$  nie przekracza 1.

2. Dwuwymiarowa zmienna losowa  $(X, Y)$  ma rozkład normalny o gęstości:

$$f(x, y) = c \cdot \exp\left[-\frac{2}{3}\left(x^2 - \frac{1}{2}xy + \frac{1}{4}y^2\right)\right].$$

Wyznaczyć stałą  $c$ , współczynnik korelacji, oraz macierz kowariancji.

3. Wykazać, że wariancja iloczynu dwóch niezależnych zmiennych losowych  $X$  i  $Y$  wyraża się wzorem

$$D^2(XY) = \sigma_1^2\sigma_2^2 + \alpha_1^2\sigma_2^2 + \alpha_2^2\sigma_1^2,$$

gdzie  $\alpha_1 = E(X)$ ,  $\alpha_2 = E(Y)$ ,  $\sigma_1^2 = D^2(X)$ ,  $\sigma_2^2 = D^2(Y)$ .

4. Dwuwymiarowa zmienna losowa  $(X, Y)$  ma rozkład normalny o parametrach  $m_1 = 2$ ,  $m_2 = 1$ ,  $\sigma_1 = 1,5$ ,  $\sigma_2 = 0,8$ ,  $\rho = 0,6$ . Podać gęstość tego rozkładu.
5. Trójwymiarowa zmienna losowa  $(X, Y, Z)$  ma rozkład normalny z zerowym wektorem wartości przeciętnych i macierzy kowariancji:

$$M = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Napisać gęstość tego rozkładu.

6. Trójwymiarowa zmienna losowa  $(X, Y, Z)$  ma rozkład o gęstości

$$f(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\sqrt{6\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{12}[6x^2 + 4(y-1)^2 + (z+2)^2 - 2(y-1)(z+2)]\right\}$$

- wyznaczyć macierz kowariancji;
- obliczyć  $E(XY)$ ;
- obliczyć  $E[Y(Y-Z)]$ .