Statystyka
Matematyka finansowa, II rok
Lista nr 3

Estymatory i ich własności

1. Udowodnić, że wariancja z próby $s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ jest obciążonym estymatorem wariancji populacji $D^2(X)$.

2. Wykonano n niezależnych doświadczeń według schematu Bernoulliego, gdzie p oznacza prawdopodobieństwo sukcesu. Sprawdzić, czy częstość pojawienia się sukcesu w takich doświadczeniach jest estymatorem zgodnym i nieobciążonym prawdopodobieństwa p.

3. Obserwacje X_1, X_2, X_3 są niezależne i pochodzą z rozkładu Poissona z parametrem λ. Sprawdzić, czy estymatory parametru λ:

$$T_1 = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3} \quad \text{i} \quad T_2 = \frac{2X_1 + 2X_2 + X_3}{5}$$

są nieobciążone. Który z nich jest obarczony mniejszym błędem szacunku?

4. Niech X i Y będą takimi niezależnymi zmiennymi losowymi, że $E(X) = 1$, $E(Y) = 3$, $D^2(X) = D^2(Y) = \sigma^2$. Dla jakiej stałej c statystyka $cX^2 + (1-c)Y^2$ jest nieobciążonym estymatorem parametru σ^2?

5. T_1 i T_2 są nieobciążonymi i niezależnymi estymatorami parametru θ oraz $D^2(T_i) = \sigma_i^2$ dla $i = 1, 2$.

   a) Sprawdzić, czy statystyka $T = aT_1 + (1-a)T_2$ jest nieobciążonym estymatorem parametru θ dla każdego $a \in \mathbb{R}$.

   b) Wyznaczyć tę wartość a, przy której wariancja estymatora T jest najmniejsza.

6. Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie dwumianowym z parametrami p i n ($0 < p < 1$, $n \in \mathbb{N}$). Dla jakiej wartości c statystyka $T = c\frac{X}{n}(1 - \frac{X}{n})$ jest estymatorem nieobciążonym parametru $\theta = p(1-p)$?

7. Zmienne losowe $X_1, \ldots, X_n$ mają wartość oczekiwaną zero i wariancję σ^2 oraz $\mathrm{cov}(X_i, X_j) = \sigma^2/n$ dla każdego $i \neq j$. Niech $\bar{X}_n$ oznacza średnią arytmetyczną ze zmiennych $X_1, \ldots, X_n$. Wyznaczyć taką stałą c, dla której statystyka $T = c\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$ jest estymatorem nieobciążonym parametru σ^2.

8. Zmienne losowe $X_1, \ldots, X_n$ mają rozkład o tej samej wartości przeciętnej $E(X_i) = \mu$ i wariancjach $D^2(X_i) = \sigma_i^2$, $i = 1, \ldots, n$. Wykazać, że estymatory postaci

$$T = \frac{a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_nX_n}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}$$

są przy wszelkich rzeczywistych a_i spełniających warunek $\sum_{i=1}^{n} a_i \neq 0$ nieobciążonymi estymatorami parametru μ.

9. Niech populacja generalna ma rozklad normalny $N(m, \sigma)$. Za pomocą metody momentów wyznaczyć estymatory parametrów m i σ^2.

10. Niech badana cecha X ma rozkład gamma z nieznanymi parametrami o gęstości:

$$f(x; p, \beta) = \begin{cases} \dfrac{\beta^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} \mathrm{e}^{-\beta x} & dla \quad x > 0 \\ 0 \quad dla \quad x \leqslant 0 \end{cases}$$

Na podstawie n-elementowej próby prostej, pobranej z populacji, w której cecha X ma dany rozkład, wyznaczyć metodą momentów estymatory $\tilde{p}$ i $\tilde{\beta}$ parametrów p i β.

11. Populacja generalna ma rozkład zero-jedynkowy z parametrem p. Na podstawie n-elementowej próby prostej oszacować metodą największej wiarygodności parametr p.

12. Populacja generalna ma rozkład $N(m, \sigma)$. Stosując metodę największej wiarygodności, wyznaczyć estymatory parametrów m i σ^2.

13. Populacja generalna ma rozkład Rayleigha określony funkcją gęstości ($\lambda > 0$):

$$f(x) = \begin{cases} 2\lambda x \exp(-\lambda x^2) & dla \quad x > 0 \\ 0 \quad dla \quad x \leqslant 0 \end{cases}$$

Wyznaczyć estymator parametru λ tego rozkładu.

14. Metodą największej wiarygodności na podstawie n-elementowej próby prostej znaleźć estymator parametru p rozkładu geometrycznego o funkcji prawdopodobieństwa

$$P(X = k) = p(1-p)^{k-1} \quad , \quad k \in \mathbb{N}.$$

15. Dana jest n-elementowa próba prosta $X_1, \ldots, X_n$ pochodząca z rozkładu Poissona z parametrem λ. Znaleźć estymator największej wiarygodności prawdopodobieństwa $P(X = 0)$.

16. Próba prosta $X_1, \ldots, X_n$ pochodzi z rozkładu o gęstości

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \theta x^{\theta - 1} & dla \quad x \in (0, 1) \\ 0 \quad dla \quad p.p. \end{cases}$$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Wyznaczyć estymator największej wiarygodności parametru θ.