procesy stochastyczne
I rok matematyki II-go stopnia
lista 4

1. Niech ciąg zmiennych losowych $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ opisuje ilość orłów wyrzuconych w n pierwszych rzutach monetą. Zbadaj, czy ciąg $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest $(\mathcal{F}_n^X)$-martyngałem.

2. Niech dany będzie ciąg niezależnych zmiennych losowych $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ całkowalnych z kwadratem o parametrach $E(X_n) = 0$ oraz $D^2(X_n) = \sigma^2$. Pokazać, że ciąg $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie
$$Y_n := \Big(\sum_{i=1}^{n} X_i\Big)^2 - n\sigma^2,$$
jest $(\mathcal{F}_n^X)$-martyngałem.

3. Gramy w następującą grę: rzucamy monetą i jeśli wypadnie orzeł wygrywamy 1 zł, a jeśli rzeszka, to przegrywamy 1 zł. Wygrana w n-tej grze opisywana jest zmienną losową X_n, a łączna wygrana po n grach , to
$$Y_n := \sum_{i=1}^{n} X_i.$$
Zbadaj, czy ciąg $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest $(\mathcal{F}_n^X)$-martyngałem.

4. Rozważyć poprzednie zadanie przy wygranej równej a zł i przegranej w wysokości b zł.

5. Zdajemy proces Poissona następująco:
   - $X_0 = 0$;
   - $X_1 \sim Poiss(\lambda_1)$;
   - $X_2 - X_1 \sim Poiss(\lambda_2)$ oraz $X_2 - X_1$ jest niezależne od X_1;
   - ...
   - $X_k - X_{k-1} \sim Poiss(\lambda_k)$ oraz $X_k - X_{k-1}$ jest niezależne od wcześniejszych przyrostów.

   Zbadaj, czy ciąg $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest $(\mathcal{F}_n^X)$-martyngałem.

6. Niech $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie $P(\xi_n \pm 1) = 0,5$. Niech
$$X_n := \sum_{i=1}^{n} \xi_i$$
oraz
$$Y_n := (-1)^n \cos(\pi X_n).$$
Zbadaj, czy ciąg $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest $(\mathcal{F}_n^\xi)$-martyngałem.

7. Niech $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie $(\mathcal{F}_n)$-martyngałem. Udowodnij, że wtedy $(X_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ jest $(\mathcal{F}_n)$-podmartyngałem.

8. Niech $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie $(\mathcal{F}_n)$-martyngałem. Udowodnić, że zmienne losowe $D_n : +X_n - X_{n-1}$ są parami nieskorelowane.

9. Niech $(Y_n)_{n\geq 1}$ będzie ciągiem zmiennych losowych o tej własności, że

$$E(Y_{n+1}|\mathcal{F}_n^Y) = aY_n + bY_{n-1}, \quad \text{dla} \;\; n \in \mathbb{N},$$

gdzie $a, b \in (0,1)$ oraz $a + b = 1$. Rozważmy ciąg $(X_n)_{n\geq 1}$ określony wzorem

$$X_n := \alpha Y_{n+1} + Y_n, \quad \text{dla} \;\; n \in \mathbb{N} \cap \{0\}.$$

Znaleźć wartości parametru $\alpha \in \mathbb{R}$, dla których ciąg $(X_n)_{n\geq 1}$ jest $(\mathcal{F}_n^Y)$-martyngałem.