procesy stochastyczne
lista 4

1. Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będą zmiennymi losowymi, określonymi nastepująco w n–krotnym rzucie moneta: zmienna losowa X_i przyjmuje wartość 1 jeśli w i-tym rzucie wypadła reszka, -1 w przeciwnym przypadku.
   a) opisz (Ω, Σ) tego doświadczenia,
   b) opisz $\mathcal{F}_1 = \sigma(X_1)$,
   c) opisz $\mathcal{F}_2 = \sigma(X_1, X_2)$,
   d) zbadaj, czy ciąg σ–ciał $\mathcal{F}_k = \sigma(X_1, \ldots, X_k),\ k = 1, 2, \ldots, n$ jest filtracją.

2. *Momentem stopu* $\tau : \Omega \to T \cup \{+\infty\}$ względem filtracji $(\mathcal{F}_t)$ nazywamy zmienną losową τ , która spelnia warunek:
$$\forall_{t \in T} \{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \le t\} \in \mathcal{F}_t.$$
Udowodnij, że τ jest momentem stopu względem filtracji $(\mathcal{F}_t) \iff$
$$\forall_{t \in T} \{\omega \in \Omega : \tau(\omega) = t\} \in \mathcal{F}_t.$$

3. Niech τ_1, τ_2 będą momentami stopu względem filtracji $(\mathcal{F}_t)$. Udowodnij, że $\tau_1 \wedge \tau_2 = \min(\tau_1, \tau_2)$ oraz $\tau_1 \vee \tau_2 = \max(\tau_1, \tau_2)$ też są momentami stopu względem filtracji $(\mathcal{F}_t)$.

4. Niech τ będzie momentem stopu względem filtracji $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Zbadaj, czy następujące zmienne losowe też są momentami stopu względem filtracji $(\mathcal{F}_n)$:
   a) $\tau + 1$;
   b) $\tau - 1$;
   c) τ^2;
   d) $\sqrt{\tau}$.

5. Rozważ poprzednie zadanie dla filtracji $\{\mathcal{F}_t : t \in [0, +\infty)\}$.

6. Udowodnij, ze zmienna losowa $\tau = c \in T$, gdzie $c =$ const. jest momentem stopu względem dowolnej filtracji.

7. Niech τ będzie momentem stopu względem filtracji $(\mathcal{F}_t)$ i niech (X_t) będzie ciągiem zmiennych losowych adaptowanym do tej filtracji.
   a) Udowodnić, że chwila pierwszej wizyty (X_t) w zbiorze $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ po chwili τ jest momentem stopu.
   b) Zdefiniować moment k-tej wizyty (X_t) w zbiorze B i udowodnić, że jest on momentem stopu.

8. Rzucamy monetą. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą zmiennymi losowymi, określonymi następująco - zmienna losowa X_i przyjmuje wartość 1 jeśli w i-tym rzucie wypadła reszka, -1 w przeciwnym przypadku. Zbadaj, czy następujące zmienne losowe są momentami stopu względem naturalnej filtracji $\mathcal{F}_k = \sigma(X_1, , X_k),\ k = 1, 2, \ldots$
   a) $\tau = 1$;
   b) $\tau = \inf\{n \in \mathbb{N} : X_1 + X_2 + \ldots + X_n = 2\}$;
   c) $\tau = \inf\{n \in \mathbb{N} : X_1 + X_2 + \ldots + X_n \ge 2\}$;
   d) $\tau = \inf\{n \in \mathbb{N} : X_{n+1} = -1\}$;
   e) $\tau = \inf\{n \in \mathbb{N} : X_n = -1\}$;
   f) $\tau = \inf\{n \in \mathbb{N} : X_{n-1} = -1\}$;
   g) $\tau + 1$, gdzie τ jest równe ilości reszek w pierwszym rzucie monetą;
   h) $\tau - 1$, gdzie τ jest wygraną w pierwszym rzucie.

9. Opisać $\mathcal{F}_\tau$, jeśli zmienne losowe X_i, $i = 1, 2, \ldots$, są niezależne, $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}, \mathcal{F}_i = \sigma(X_1, , X_i), \tau = \inf\{n \le 2 : X_1 + \ldots + X_n = 1\}$.