ćwiczenia z rachunku prawdopodobieństwa
ii rok informatyki i ekonometrii
lista 4

1. Niech zdarzenia A, B są niezależne. Udowodnić, że są niezależne następujące zdarzenia
   - A, B';
   - A', B;
   - $A, \emptyset$;
   - A, Ω;
   - $A, B \cup C$ jeśli $B \cap C = \emptyset$, A i C są niezależne;
   - A', B'.

2. Niech $A \subseteq B$, A i C oraz B i C są niezależne Wtedy $B \setminus A$ i C są również niezależne.

3. Wykaż, że jeśli $P(A) = a, P(B) = b$, gdzie $b \neq 0$, to $P(A \mid B) \geq 1 - \frac{1-a}{b}$.

4. Rzucamy trzema kostkami do gry. Niech A oznacza zdarzenie polegające na tym, że na każdej kostce wypadła inna liczba oczek, B oznacza zdarzenie, że na żadnej kostce nie wypadła szóstka? Czy zdarzenia A i B są niezależne?

5. Udowodnić, że jeśli zdarzenia A i B są niezależne, to również zdarzenia A' i B' oraz zdarzenia A i B' są niezależne.

6. Trzech studentów przygotowywało się niezależnie do egzaminu z rachunku prawdopodobieństwa. Znaleźć prawdopodobieństwo tego, że trzeci z nich zdał, jeśli wiadomo, że zdało dwóch, a prawdopodobieństwa zdania dla poszczególnych studentów wynoszą odpowiednio: $p_1 = 0,6, p_2 = 0,5, p_3 = 0,4$.

7. Rzucono 10 razy kostką. Jaka jest szansa otrzymania:

   a) 6 oczek co najmniej raz?

   b) 5 oczek dokładnie 3 razy?

8. Rzucono 10 razy symetryczną kostką. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w pierwszym rzucie otrzymano szóstkę, jeśli wiadomo, że otrzymano 3 szóstki?

9. Ile razy należy rzucić kostką, aby prawdopodobieństwo wypadnięcia "5" było nie mniejsze niż $\frac{1}{2}$?

10. Rzucamy n razy kostką do gry. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że: a) szóstka pojawi się dokładnie raz; b) szóstka pojawi się co najmniej raz.

11. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że pan Kowalski nie trafi nawet czwórki grając przez rok dwa razy w tygodniu w Totolotka (typując 6 liczb z 49)?

12. Jaka jest najbardziej prawdopodobna liczba szóstek, przy 100 rzutach kostką?

13. Owad składa k jajeczek z prawdopodobieństwem $\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, $\lambda > 0$. Potomek wylęga się z jaja z prawdopodobieństwem p, niezależnie od innych. Znaleźć prawdopodobieństwo, że liczba potomków będzie równa l.

zadania do samodzielnego rozwiązania:

1. Zdarzenia A i B są niezależne i takie, że $P(A \cup B) = 1$. Udowodnić, że $P(A) = 1$ lub $P(B) = 1$.

2. Z talii 52 kart losujemy jedną. Zdarzenie A polega na tym, że wylosowana karta jest asem, B na tym, że wylosowana karta jest pikiem, C - wylosowana karta jest blotką. Zbadać niezależność zdarzeń A i C oraz niezależność zdarzeń A i B.

3. Rzucamy dwiema kości do gry i określamy trzy zdarzenia: A - pojawienie się parzystej liczby oczek na pierwszej kości, B - pojawienie się nieparzystej liczby oczek na drugiej kości i C - pojawienie się na obu kościach liczby oczek, których suma jest większa od 7. Zbadać niezależność zdarzeń A, B i C.

4. Na odcinku $[0, 1]$ umieszczamy losowo i niezależnie punkty x i y. Niech A będzie zdarzeniem polegającym na tym, że $x^2 + y^2 \leq 1$, natomiast B zdarzeniem polegającym na tym, że $x < y$. Czy zdarzenia A i B są niezależne?

5. Z kuli o promieniu R wylosowano N punktów. Wyznaczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że odległość od środka kuli do najbliżej położonego punktu jest większa lub równa $a, 0 < a < R$..

6. Przeprowadzono serię doświadczeń według schematu Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu w każdym doświadczeniu równym p. Obliczyć prawdopodobieństwo uzyskania r-tego sukcesu dokładnie w $(k+r)$-tym doświadczeniu, $k = 0, 1, 2, \ldots$