ćwiczenia z rachunku prawdopodobieństwa
matematyka, III rok
lista 4

1. W 10-cio elementowej partii pewnego towaru są 2 sztuki wadliwe. Wylosowano bez zwrotu 2 sztuki. Niech zmienna losowa X przyjmuje wartości równe liczbie sztuk wadliwych wśród 2 wylosowanych sztuk, zaś Y przyjmuje wartość 1, jeśli pierwsza wylosowana sztuka jest wadliwa, oraz 0, jeśli nie jest wadliwa. Obliczyć $P(X+Y=2)$ oraz $E(X+Y)$.

2. Niech zmienna losowa $X \sim Poisson(\lambda_1)$, natomiast zmienna losowa $Y \sim Poisson(\lambda_2)$. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej $X+Y$. Rozwiązanie uogólnić na dowolną sumę rozkładów Poissona.

3. Niech X_1, X_2 będą niezaleznymi zmiennymi losowymi o rozkładach odpowiednio $N(a_1, \sigma_1^2)$, $N(a_2, \sigma_2^2)$. Znaleźć gęstość zmiennej losowej $X_1 + X_2$.

4. Niech zmienne losowe X, Y będą niezależne i mają jadnakowe rozkłady $Exp(1)$, i niech $U = X+Y$, $V = \frac{X}{X+Y}$. Znaleźć
   - gęstość zmiennej losowej U;
   - gęstość zmiennej losowej V;
   - czy zmienne U, V są niezależne ?

5. Gęstość dwuwymiarowej zmiennej losowej (X, Y) dana jest wzorem
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4}(1 + xy(x^2 - y^2)) & \text{dla} \quad |x| < 1 \ , |y| < 1 \\ 0 & \text{w.p.p} \end{cases}$$
Wykazać, że gęstość zmiennej losowej $X+Y$ spełnia związek $f_{X+Y}(x) = f_X(x) f_Y(x)$. Czy zmienne losowe X i Y są niezależne?

6. Czas napełniania X pewnego zbiornika wodą jest zmienną losową o gęstości:
$$f_1(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{dla} \quad x \geq 0, \ \lambda > 0 \\ 0 & \text{w.p.p} \end{cases}$$
Czas opróżniania Y tego zbiornika jest zmienną losową o gęstości:
$$f_2(y) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y} & \text{dla} \quad y \geq 0, \ \lambda > 0 \\ 0 & \text{w.p.p} \end{cases}$$
Zakładając, że X i Y są niezależnymi zmiennymi losowymi wyznaczyć rozkład zmiennej losowej $Z = X+Y$.

7. Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach odpowiednio $Exp(\lambda)$ oraz $U[0,1]$. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej $Z = X+Y$.

8. Niech zmienna losowa X ma rozkład równomierny dwupunktowy i $W_X = \{0, 1\}$, natomiast zmienna losowa Y ma rozkład $U[0,1]$. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej $Z = X+Y$.

9. Każdy z dwóch odcinków o długości a podzielono losowo wybranym punktem na 2 części. Zakładając, że długości krótszych odcinków są zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym, obliczyć prawdopodobieństwo, że suma długości krótszych odcinków spełnia nierówność $\frac{1}{4} \leq S \leq \frac{3}{4}a$.

10. Zakładając, że zmienne losowe X i Y są niezależne i mają te same rozkłady geometryczne z parametrem p, wyznaczyć rozkład zmiennej losowej $Z = X+Y$.

11. X i Y są niezależnymi, stadnaryzowanymi zmiennymi losowymi o rozkłądzie normalnym. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej $Z = X^2 + Y^2$.

12. Wykazać, że kompozycja rozkładów gamma jest również rozkładem gamma.

13. Znaleźć kompozycję dwóch rozkładów jednostajnych na odcinku $[0,1]$.

14. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład o gęstości
$$f(x,y) = \frac{\sqrt{5}}{2\pi} \exp[-\frac{1}{2}(x^2 + 2xy + y^2)].$$
Wyznaczyć łączny rozkład układu zmiennych losowych (U, V), gdzie $U = X+Y$ i $V = X-Y$.