

Statystyka
Matematyka finansowa, II rok
Lista nr 4

Estymacja przedziałowa

1. Wytrzymałość pewnego materiału budowlanego jest zmienną losową o rozkładzie $N(m, 1)$. W celu oszacowania nieznannej średniej wytrzymałości tego materiału dokonano pomiaru wytrzymałości 5 wylosowanych niezależnie sztuk tego materiału. Wyniki pomiarów były następujące: 20,4; 19,6; 22,1; 20,8; 21,1. Przyjmując współczynnik ufności 0,90, zbudować przedział ufności dla średniej wytrzymałości badanego materiału budowlanego. O ile zmieni się długość oszacowanego przedziału, jeśli liczebność próby zwiększymy do 45 elementów?
2. Zakłada się, że miesięczne wydatki na odzież i obuwiu w rodzinach czteroosobowych mają rozkład normalny.
 - a) Oszacować metodą przedziałową przeciętną wartość tych wydatków, jeśli na podstawie budżetów 10 losowo wybranych gospodarstw domowych w pewnym osiedlu otrzymano $\bar{X} = 156$ zł i $s = 30$ zł. Poziom ufności $1 - \alpha = 0,98$.
 - b) Jaki otrzymamy przedział, jeśli założymy, że wydatki te mają rozkład $N(m, 30)$?
3. W celu zbadania wieku lekarzy zatrudnionych na wsi i w mieście pobrano losowo dwie próby: 9-elementową próbę lekarzy wiejskich i 8-elementową próbę lekarzy miejskich. Średni wiek lekarzy wiejskich wynosił 42 lata, a lekarzy miejskich - 46 lat. Odchylenie standardowe w rozkładzie wieku ogółu lekarzy zatrudnionych na wsi i w mieście łącznie wyniosło 2,4 roku. Zakładając, że rozkład wieku ogółu lekarzy jest normalny, zbudować przedział ufności dla przeciętnego wieku ogółu lekarzy (miejskich i wiejskich łącznie), przyjmując współczynnik ufności 0,98.
4. Średnia frekwencja widzów w kinie na seansie filmowym w jednym z kin warszawskich ma rozkład $N(m, 40)$. Na podstawie obserwacji liczby widzów na 25 losowo wybranych seansach oszacowano przedział liczbowy (184;216) dla nieznannej średniej frekwencji na wszystkich seansach.
 - a) Jaki poziom współczynnika ufności przyjęto przy estymacji?
 - b) Ile wynosiła średnia liczba widzów w zbadanej próbie 25 seansów kinowych?
5. Czas czekania na zgłoszenie się abonenta do centrali telefonicznej ma rozkład normalny z wariancją $\sigma^2 = 81 s^2$. Ile niezależnych pomiarów czasu czekania na abonenta należy wykonać, aby obliczony na ich podstawie przedział ufności na poziomie ufności $1 - \alpha = 0,99$ dla wartości oczekiwanej czasu czekania miał długość mniejszą od czterech sekund.
6. Na podstawie wielokrotnych obserwacji ustalono, że rozkład czasu dojazdu do pracy osób zatrudnionych w sklepach stołecznych jest rozkładem normalnym. W celu oszacowania nieznannej średniej w tym rozkładzie wylosowano niezależnie 100-elementową próbę pracowników. Średni czas dojazdu w tej próbie wynosił 40 min, a odchylenie standardowe stanowiło 1/2 czasu średniego. Jaki współczynnik ufności przyjęto przy szacowaniu średniej w rozkładzie czasu dojazdu do pracy ogółu pracowników, jeżeli długość oszacowanego przedziału wyniosła 7,84 min?
7. Inwestor chce oszacować ryzyko pewnego przedsięwzięcia, które przynosi losowy zysk o rozkładzie normalnym. Ryzyko jest mierzone odchyleniem standardowym zysku. Po obliczeniu średniej i wariancji z próby prostej złożonej z $n = 17$ zysków z przeszłości, otrzymano następujące wyniki: $\bar{X}_n = 1500$, $S_n^2 = 64516$. Podać przedział ufności dla

- a) oczekiwanego zysku,
- b) ryzyka,

na poziomie ufności 0,99.

8. Zmierzono czas wykonania pewnego detalu przez $n = 169$ losowo wybranych pracowników. Średnia arytmetyczna \bar{X}_n z pomiarów jest równa 125 minut, a wariancja $S_n^2 = 144$ minuty². Przedziałem ufności dla wartości oczekiwanej czasu wykonania detalu jest przedział (122,618; 127,382). Obliczyć, na jakim poziomie ufności został wyznaczony ten przedział.
9. Wymiary 6 losowo wybranych detali, wyrażone w mm , kształtowały się następująco: 6,3; 5,9; 6,2; 5,8; 5,7; 6,1. Przyjmując założenie, że rozkład wymiarów ogółu produkowanych detali jest normalny, przy współczynniku ufności równym 0,90, oszacować nieznanne odchylenie standardowe wymiarów ogółu produkowanych detali.
10. Czas produkcji 5 losowo wybranych sztuk wyrobu (w s) kształtował się następująco: 5,1; 4,9; 4,8; 5,3; 4,9.
 - a) Przyjmując współczynnik ufności na poziomie 0,98, oszacować wariancję czasu produkcji ogółu wytwarzanych wyrobów.
 - b) Jak zmieni się długość szacowanego przedziału, gdy współczynnik ufności zmniejszymy do poziomu 0,90?
11. Na podstawie wyników 10-elementowej próby pracowników spółki oszacowano przedziałowo wariancję pożyczek udzielanych z kasy zapomogowo-pożyczkowej wszystkim pracownikom. Oszacowany przedział ma postać (5910,5148; 30075,188) PLN². Jaki poziom współczynnika ufności przyjęto przy estymacji, jeśli dodatkowo wiadomo, że odchylenie standardowe pożyczanych kwot w zbadanej próbie wynosiło 100 PLN?
12. Rozkład wagi uczniów pierwszych klas szkół podstawowych jest $N(m, 3)$. Ilu uczniów powinno się wylosować do próby, aby oszacować przeciętną wagę ucznia I klasy z błędem 0,5 kg na poziomie ufności $1 - \alpha = 0,98$?
13. W grupie 3600 losowo wybranych pasażerów warszawskiego metra 1584 osoby stwierdziły, że metro jest dla nich jedynym środkiem dojazdu do pracy. Zbudować przedział ufności dla nieznannej frakcji osób, dla których metro jest jedynym środkiem dojazdu do pracy wśród ogółu pasażerów. Przyjąć współczynnik ufności na poziomie 0,90. Określić błąd szacunku.
14. Poniższy szereg rozdzielnicy przedstawia strukturę 1000 losowo wybranych mieszkań na osiedlu Ursynów w Warszawie według liczby izb.

Liczba izb w mieszkaniu	2	3	4	5	6 i więcej
Liczba mieszkań	96	288	404	168	44

Oszacowano na podstawie powyższej próby przedział liczbowy dla odsetka lokali 4-izbowych w populacji wszystkich mieszkań na Ursynowie: (37,4%; 43,4%).

 - a) Jaki współczynnik ufności przyjęto przy konstrukcji powyższego przedziału?
 - b) Jak zmieni się precyzja oszacowania, jeśli przy założeniu niezmienności struktury próby oraz przy tym samym współczynniku ufności liczebność próby zmniejszymy do 250 mieszkań?
15. W losowo wybranej próbie 100 studentów SGH 40 osób mieszkało na stałe w Warszawie. Przyjmując współczynnik ufności na poziomie 0,90:

- a) oszacować przedziałowo udział studentów mieszkających na stałe poza Warszawą wśród ogółu studentów;
- b) określić, o ile osób należy zwiększyć powyższą próbę, aby dwukrotnie wzrosła precyzja oszacowania.

16. Dokonano badań drogowych 30 samochodów FSO 1500 pod względem osiągniętej prędkości maksymalnej. Wyniki były następujące:

Prędkość maksymalna (km/h)	130-140	140-150	150-160	160-170
Liczba samochodów	3	8	14	5

- a) Na poziomie ufności 0,98 wyznaczyć przedział ufności dla średniej prędkości (przy założeniu, że rozkład prędkości jest normalny).
- b) Oszacować metodą przedziałową wariancję prędkości maksymalnej na poziomie ufności 0,9 (zakładamy, że rozkład prędkości maksymalnej jest normalny).

17. Na podstawie próby losowej, obejmującej 100 kwitów kasowych na stoisku kosmetycznym w domu towarowym „Centrum”, otrzymano średnią arytmetyczną kwoty zakupu, wynoszącą 15,4 zł oraz odchylenie standardowe kwoty zakupu wynoszące 4 zł.

- a) Wyznaczyć 95% przedział ufności dla przeciętnej kwoty zakupu na tym stoisku.
- b) Wśród 200 losowo wybranych kwitów 28 wystawiono na kwotę powyżej 50 zł. Oszacować metodą przedziałową prawdopodobieństwo, że losowo wybrany kwit na tym stoisku będzie opiewać na taką właśnie kwotę (poziom ufności 0,99).

18. Analizując wydajność pracy w zakładzie X otrzymano dane:

Wydajność w szt./godz.	0-4	4-8	8-12	12-16
Liczba pracowników	8	12	15	5

Założyć że rozkład jest normalny oraz wyznaczyć przedział ufności dla przeciętnej wydajności na poziomie ufności $1 - \alpha = 0,95$.