

**EMF**  
**matematyka, I rok, I stopień**  
**lista 5**  
*renty*

Zadania z podręcznika Kellisona

1. A family wishes to accumulate \$50000 in a college education fund at the end of 20 years. If they deposit \$1000 in the fund at the end of each of the first 10 years and \$1000 + X in the fund at the end of each of the second 10 years, find X to the nearest dollar if the fund earns 7% effective.
2. The cash price of a new automobile is \$10000. The purchaser is willing to finance the car at 18% convertible monthly and to make payments of \$250 at the end of each month for four years. Find the down payment which will be necessary.
3. An annuity provides a payment of  $n$  at the end of each year for  $n$  years. The annual effective interest rate is  $\frac{1}{n}$ . What is the present value of the annuity?
4. If  $a_{\overline{n}|} = x$  and  $a_{\overline{2n}|} = y$ , express  $d$  as a function of  $x$  and  $y$ .
5.
  - a) Show that  $a_{\overline{m+n}|} = a_{\overline{m}|} + v^m a_{\overline{n}|} = v^m a_{\overline{m}|} + a_{\overline{n}|}$ .
  - b) Show that  $s_{\overline{m+n}|} = s_{\overline{m}|} + (1+i)^m s_{\overline{n}|} = (1+i)^n s_{\overline{m}|} + s_{\overline{n}|}$ .
  - c) Verbally interpret the results in (a) and (b).
6.
  - a) Show that  $a_{\overline{m-n}|} = a_{\overline{m}|} - v^m s_{\overline{n}|} = (1+i)^n a_{\overline{m}|} - s_{\overline{n}|}$ ,  $m > n$ .
  - b) Show that  $s_{\overline{m-n}|} = s_{\overline{m}|} - (1+i)^m a_{\overline{n}|} = v^n s_{\overline{m}|} - a_{\overline{n}|}$ ,  $m > n$ .
  - c) Verbally interpret the results in (a) and (b).
7. You are given the following annuity values:

$$a_{\overline{7}|} = 5,153 \quad a_{\overline{11}|} = 7,036 \quad a_{\overline{18}|} = 9,180$$

Find  $i$ .

8. Show that

$$\frac{1}{1-v^{10}} = \frac{1}{s_{\overline{10}|}} \left( s_{\overline{10}|} + \frac{1}{i} \right).$$

9. Find the present value of payments of \$200 every six months starting immediately and continuing through four years from the present, and \$100 every six months thereafter through ten years, if  $i^{(2)} = 0,06$ .
10. A worker aged 40 wishes to accumulate a fund for retirement by depositing \$1000 at the beginning of each year for 25 years. Starting at age 65 the worker plans to make 15 annual withdrawals at the beginning of each year. Assuming that all payments are certain to be made, find the amount of each withdrawal starting at age 65 to the nearest dollar, if the effective rate of interest is 8% during the first 25 years but only 7% thereafter.
11. Find  $\ddot{a}_{\overline{8}|}$  if the effective rate of discount is 10%.
12. Derive formula
 
$$\frac{1}{\ddot{a}_{\overline{n}|}} = \frac{1}{\ddot{s}_{\overline{n}|}} + d.$$
13.
  - a) Show that  $\ddot{a}_{\overline{n}|} = a_{\overline{n}|} + 1 - v^n$ ;
  - b) Show that  $\ddot{s}_{\overline{n}|} = s_{\overline{n}|} - 1 + (1+i)^n$ ;
  - c) Verbally interpret the results in (a) and (b).
14. Show that
 
$$\frac{\ddot{s}_{\overline{2n}|}}{\ddot{s}_{\overline{n}|}} + \frac{\ddot{s}_{\overline{n}|}}{\ddot{s}_{\overline{2n}|}} - \frac{\ddot{s}_{\overline{3n}|}}{\ddot{s}_{\overline{2n}|}} = 1.$$
15. If  $\ddot{a}_{\overline{p}|} = x$  and  $s_{\overline{q}|} = y$ , show that  $s_{\overline{p+q}|} = \frac{vx+y}{1+iy}$ .

Zadania ze zbioru zadań Podgórskiej i inne

16. Jaka jest różnica między wartościami początkowymi dwóch rent o 12 ratach w wysokości 100 zł przy okresowej stopie procentowej 9,5%, jeśli jedna z nich jest płatna z góry, a druga z dołu? Przy jakiej stopie procentowej ta różnica byłaby równa 80% wysokości raty?
17. Czy roczna stopa procentowa renty płaconej z dołu przez 10 lat jest mniejsza, czy większa od 20%, jeśli roczne raty są stałe i wynoszą 100 jp oraz wiemy, że:
- wartość końcowa renty wynosi 2500 jp;
  - wartość początkowa renty wynosi 400 jp.
18. Oblicz wysokość raty renty nieskończonej o wartości początkowej 300 jp płatnej:
- z dołu,
  - z góry,
- jeśli okresowa stopa procentowa wynosi 6%.
19. Mecenas zaproponował 3 warianty wsparcia dla pewnego teatru:
- jednorazowa wpłata w wysokości 240 tys zł;
  - wpłata w 10 równych rocznych ratach w wysokości 30 tys zł (pierwsza wpłata natychmiast);
  - stworzenie specjalnej fundacji, która zarządzałaby pewnym kapitałem i po wsze czasy przeznaczalaby na rzecz teatru na koniec każdego roku 15 tys zł.
- Który wariant powinna wybrać dyrekcja teatru, jeśli przewidywana roczna stopa procentowa wynosi 7,5%.
20. Obliczyć liczbę rat renty o wartości początkowej 1000 jp, jeśli stopa procentowa renty wynosi 10%, a raty są płatne z dołu, stałe i równe 180 jp. Jeśli będzie to potrzebne, przeprowadzić korektę ostatniej raty.
21. Pan Beniamin przez 3 lata pod koniec każdego miesiąca wpłacał na konto w pewnym banku kwotę 200 zł. Przez cały rozpatrywany okres efektywna roczna stopa oprocentowania jego oszczędności wynosiła 14%. Po jakim czasie kwota zgromadzona w ciągu 3 lat na koncie pana Beniamina podwoi się, jeżeli:
- nadal będzie oszczędzał po 200 zł,
  - zwiększy wpłaty do 300 zł.
22. Na rachunek w Banku Nowoczesnym pani Hiacynta wpłacała przez 6 lata pod koniec każdego półrocza po 500 zł. Jaka suma jest zgromadzona po 6 latach od rozpoczęcia oszczędzania na jej rachunku, jeżeli rachunek jest oprocentowany zgodnie z zasadami oprocentowania ciągłego przy rocznej stopie 6%.