ćwiczenia z rachunku prawdopodobieństwa
matematyka finansowa, II rok
lista 5

1. Niech zdarzenia $A, B$ są niezależne. Udowodnić, że są niezależne następujące zdarzenia
   - $A, B'$;
   - $A', B$;
   - $A, \emptyset$;
   - $A, \Omega$;
   - $A, B \cup C$ jeśli $B \cap C = \emptyset$, A i C są niezależne;
   - $A', B'$.
2. Niech $P(A/B) = P(A/B')$ oraz $P(B) > 0, P(B') > 0$. Udowodnić, że zdarzenia $A, B$ są niezależne.
3. Niech $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_7\}, \Sigma = 2^\Omega, P(\omega_i) = \frac{1}{7}$. Czy można określić w $(\Omega, \Sigma, P)$ dwa zdarzenia A, B niezależne takie, że $0 < P(A) < 1$ i $0 < P(B) < 1$?
4. Podać przykład zdarzeń niezależnych $A_1, A_2, A_3$ takich, że $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{2}$.
5. Niech $A \subseteq B$, $A$ i $C$ oraz $B$ i $C$ są niezależne Wtedy $B \setminus A$ i $C$ są również niezależne.
6. Wykaż, że jeśli $P(A) = a, P(B) = b$, gdzie $b \neq 0$, to $P(A \mid B) \geq 1 - \frac{1-a}{b}$.
7. Co jest bardziej prawdopodobne: wygrać z równorzędnym przeciwnikiem
   - 2 partie z 3, czy
   - 3 partie z 5 ?
8. Ile razy należy rzucić kostką, aby prawdopodobieństwo wypadnięcia "5" było niemniejsze niż $\frac{1}{2}$?
9. Z kuli o promieniu $R$ wylosowano $N$ punktów. Wyznaczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że odległość od środka kuli do najbliżej położonego punktu jest większa lub równa $a, 0 < a < R$..
10. Rzucono 10 razy kostką. Jaka jest szansa otrzymania:

    a) 6 oczek co najmniej raz?

    b) 5 oczek dokładnie 3 razy?
11. Rzucono 10 razy symetryczną kostką. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w pierwszym rzucie otrzymano szóstkę, jeśli wiadomo, że otrzymano 3 szóstki?
12. Obliczyć prawdopodobieństwo otrzymania parzystej liczby sukcesów w ciągu $n$ prób Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu w pojedynczej próbie równym $p$.
13. Rzucono 100 razy kostką do gry. Jaka jest najbardziej prawdopodobna ilość wyrzuconych piątek?
14. Przeprowadzono serię doświadczeń według schematu Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu w każdym doświadczeniu równym $p$. Obliczyć prawdopodobieństwo uzyskania $r$-tego sukcesu dokładnie w $(k + r)$-tym doświadczeniu, $k = 0, 1, 2, \ldots$
15. **(Problem Banacha)**Pewien matematyk nosi w kieszeni dwa pudełka zapałek. Za każdym razem, gdy potrzebuje zapałki, bierze ją z losowo wybranego pudełka. Po pewnym czasie, wybierając jedno z pudełek, stwierdzi on, że jest ono puste. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w tym momencie drugie pudełko będzie zawierało $k$ zapałek, jeśli na początku każde pudełko zawierało $n$ zapałek?
16. Owad składa $k$ jajeczek z prawdopodobieństwem $\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, $\lambda > 0$. Potomek wylęga się z jaja z prawdopodobieństwem $p$, niezależnie od innych. Znaleźć prawdopodobieństwo, że liczba potomków będzie równa $l$.

**zadania do samodzielnego rozwiązania**:

1. Rzucamy dwiema kostkami, określając trzy zdarzenia: $A$ - nieparzysta ilość oczek na pierwszej kostce, $B$ - nieparzysta ilość oczek na drugiej kostce, $C$ - nieparzysta suma oczek. Czy zdarzenia $A, B, C$ są niezależne parami? Czy są niezależne?

2. Na odcinku $[0, 1]$ umieszczamy losowo i niezależnie punkty $x$ i $y$. Niech $A$ będzie zdarzeniem polegającym na tym, że $x^2 + y^2 \leq 1$, natomiast $B$ zdarzeniem polegającym na tym, że $x < y$. Czy zdarzenia $A$ i $B$ są niezależne?

3. Które ze zdarzeń jest bardziej prawdopodobne:

   - w 4 rzutach kostką wypadnie chociaż raz 6 oczek
   - w 24 rzutach dwoma kostkami chociaż raz wypadnie para (6,6).

4. Wiadomo, że w trakcie $n$ rzutów monetą przynajmniej raz wypadł orzeł. Wyznaczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że liczba orłów jest większa lub równa 2.