procesy stochastyczne
I rok matematyki II-go stopnia
lista 5

Definicja 1. *Niech $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem zmiennych losowych, ξ zmienną losową o wartościach naturalnych. Sumą losową ciągu zmiennych losowych $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ względem zmiennej losowej ξ nazywamy zmienną losową S_ξ postaci*

$$S_\xi(\omega) = \sum_{n=1}^{\xi(\omega)} X_n(\omega).$$

1. Niech $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych, zaś τ momentem stopu względem filtracji $(\mathcal{F}_n^X)_{n\in\mathbb{N}}$. Udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zmienne losowe X_n oraz $I_{\{\tau\geq n\}}$ są niezależne.

2. (**Tożsamość Walda**) Niech $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie, przy czym $E(|X_1|) < \infty$. Niech τ będzie momentem stopu względem filtracji $(\mathcal{F}_n^X)_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie $E(\tau) < \infty$. Pokazać, że

$$E(S_\tau) = E(\tau) \cdot E(X_1).$$

3. Rzucamy kostką tak długo, aż otrzymamy wszystkie oczka. Znaleźć wartość średnią sumy wyrzuconych oczek.

4. Niech $(X_n)_{n\geq 1}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie równomiernym na zbiorze $\{-1, 1\}$. Pokazać, że dla $\tau = \inf\{n : S_n = 1\}$ mamy, że $E(\tau) = \infty$.

5. Niech $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest martyngałem względem filtracji $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, a τ momentem stopu względem filtracji $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pokazać, że ciąg zatrzymany $(\xi_{\tau\wedge n})$ też jest martyngałem.

6. (**Optional Stopping Theorem**) Niech $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie martyngałem, a τ momentem stopu względem filtracji $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oraz niech spełnione będą następujące warunki

   1) $P(\tau < \infty) = 1$,
   2) ξ_τ jest całkowalną zmienną losową,
   3) $\lim_{n\to\infty} E(\xi_n I_{\tau>n}) = 0$.

   Pokazać, że wówczas

$$E(\xi_\tau) = E(\xi_1).$$