**procesy stochastyczne**
**lista 5**
*martyngały*

*Definicja*: Proces stochastyczny $\{X_t : t \geq 0\}$ całkowalny oraz adaptowany do filtracji $\{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}$ nazywamy:

- **martyngałem**, gdy $t \geq s \Rightarrow E(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s$;
- **podmartyngałem**, gdy $t \geq s \Rightarrow E(X_t|\mathcal{F}_s) \geq X_s$;
- **nadmartyngałem**, gdy $t \geq s \Rightarrow E(X_t|\mathcal{F}_s) \leq X_s$.

1. Niech proces stochastyczny $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ opisuje liczbę orłów wyrzuconych w n pierwszych rzutach monetą z N rzutów. Filtracja $\{\mathcal{F}_n : n \in \mathbb{N}\}$ jest filtracją naturalną. Zbadaj, czy $X_n$ jest martyngałem.
2. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi, całkowalnymi zmiennymi losowymi o wartościach oczekiwanych równych zero. Niech $Y_n = \sum_{i=1}^n X_i$ oraz $\mathcal{F}_k = \sigma(Y_1, \ldots, Y_k)$. Udowodnij, ze $(Y_n)$ jest martyngałem.
3. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi oraz ograniczonymi zmiennymi losowymi o parametrach $E(X_n) = 0$, $D^2(X_n) = \sigma^2$. Pokazać, że $(Y_n)$ jest martyngałem względem filtracji $\mathcal{F}_n$, jeśli $Y_n = (\sum_{i=1}^n X_i)^2 - n\sigma^2$ oraz $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \ldots, Y_n)$.
4. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi, całkowalnymi oraz ograniczonymi zmiennymi losowymi o parametrach $E(X_n) = 1$. Zbadaj, czy $(Y_n)$ jest martyngałem względem filtracji $\mathcal{F}_n$, jeśli $Y_n = X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_n$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$.
5. Niech $X_0, X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi, ograniczonymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie oraz $E(X_0) = 0$. Zbadaj, czy $(Y_n)$ jest martyngałem względem filtracji $\mathcal{F}_n$, jeśli $Y_0 = X_0, Y_n = \sum_{k=1}^n X_{k-1} \cdot X_k$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n)$.
6. Gramy w nastepującą grę: rzucamy moneta i jeśli wypadnie orzeł, wygrywamy 1 zł, a jeśli reszka, to przegrywamy 1 zł. Wygrana w n–tej grze to zmienna losowa $X_n$, a łączna wygrana po n grach to $Y_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Zbadaj, czy $(Y_n)$ jest martyngałem względem naturalnej filtracji.
7. Rozważyć poprzednie zadanie dla wygranej $a$ zł i przegranej $b$ zł.
8. Zadajemy proces Poissona nastepujaco: $X_0 = 0, X_1 \sim Poisson(\lambda_1), X_2 - X_1 \sim Poisson(\lambda_2)$ oraz $X_2 - X_1$ jest niezależne od $X_1$. $X_k - X_{k-1} \sim Poisson(\lambda_k)$ oraz $X_k - X_{k-1}$ jest niezależne od wcześniejszych przyrostów. Zbadaj, czy proces $(X_n)$ jest martyngałem.
9. Niech $X_i$, $i = 1, 2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi, $P(X_i = 1) = p, P(X_i = -1) = q = 1 - p$. Niech $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$ i $Y_n = (\frac{q}{p})^{X_1 + \ldots + X_n}$. Wykazać, że ciąg $(Y_n)$ jest $\mathcal{F}_n$-martyngałem.
10. Martyngał $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ jest całkowalny z kwadratem. Niech

    $$D_n = X_n - X_{n-1}, n = 1, 2 \ldots$$

    Wykazać, że zmienne losowe $D_n$ (czyli przyrosty martyngałowe) są parami nieskorelowane.
11. Pokazać, że jeśli funkcja kowariancji procesu jest niemalejąca, ma postać $K(t, s) = D^2(X_{\min(t,s)})$ oraz $K(0, s) = 0, E(X_t) = 0$ to:
    1) $P(X_0 = 0) = 1$;
    2) proces $(X_t)$ jest procesem o przyrostach niezależnych.
12. Niech $X_1, X_2, \ldots$ - ciąg niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = 0,5$. Niech $Y_n = \sum_{i=1}^n X_i$ oraz $Z_n = (-1)^n \cos(\pi Y_n)$. Zbadaj, czy $(Z_n)$ jest martyngałem względem filtracji $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$.
13. Niech $(X_n, \mathcal{F}_n)$ będzie martyngałem względem filtracji $\mathcal{F}_n$. Udowodnij, ze wtedy $(X_n^2, \mathcal{F}_n)$ jest podmartyngałem względem filtracji $\mathcal{F}_n$.