

ćwiczenia z rachunku prawdopodobieństwa
matematyka, III rok
lista 5 (prawdopodobieństwo warunkowe, całkowite, wzór Bayesa)

1. Udowodnić, że prawdopodobieństwo warunkowe spełnia aksjomaty prawdopodobieństwa.
2. Rzucamy trzema kostkami. Jakie jest prawdopodobieństwo, że na żadnej kostce nie wypadła szóstka, jeśli na każdej kostce wypadła inna liczba oczek?
3. Z talii 8 kart - czterech króli i czterech asów - wybieramy losowo dwie karty. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że wybrano 2 asy, jeśli wiemy, że:
 - a) wybrano co najmniej jednego asa,
 - b) wśród wybranych kart jest czerwony as,
 - c) wśród wybranych kart jest as trefl.
4. Udowodnić, że jeśli B_1, \dots, B_n są zdarzeniami rozłącznymi, $P(B_i \cap C) > 0$ dla każdego $i = 1, 2, \dots, n$ oraz $A \cap C \subset \bigcup_{k=1}^n B_k$, to

$$P(A|C) = \sum_{k=1}^n P(A|B_k \cap C)P(B_k|C).$$

5. Podać przykład zdarzeń A i B , dla których
 - a) $P(A) < P(A|B)$;
 - b) $P(A) = P(A|B)$;
 - c) $P(A) > P(A|B)$.
6. Wybieramy losowo jeden ze zbiorów $A = \{1, 2, \dots, 62\}$ lub $B = \{1, 2, \dots, 124\}$. Z wybranego zbioru losujemy liczbę x . Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że liczba $x^2 + 1$ jest podzielna przez 10.
7. Wojtek miał w portfelu monety: N złotych i M pięćzłotówek, ale zgubił jedną monetę i nie wie o jakim nominale.
 - a) Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania złotówki z tego portfela?
 - b) Wyciągnięte losowo z portfela dwie monety okazały się złotówkami. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że zgubiona moneta była złotówką?
8. Urna zawiera n kul białych i m kul czarnych. Losujemy jedną kulę, a następnie wrzucamy ją ponownie do urny dorzucając dodatkowo k kul białych, jeśli była to kula biała lub k kul czarnych, jeśli była czarna. Obliczyć prawdopodobieństwo wyciągnięcia kuli białej z tak uzupełnionej urny.
9. W pewnej fabryce maszyny typu A, B, C dają odpowiednio 25 %, 35 % i 40 % produkcji danego wyrobu. Maszyny te produkują odpowiednio 5 %, 4 % i 2 % braków.
 - a) Obliczyć prawdopodobieństwo, że wylosowano towar dobry.
 - b) Wylosowano towar dobry. Obliczyć prawdopodobieństwo, że pochodzi on z maszyny B?
10. Pewna choroba występuje w 0,2% ogółu ludności. Przygotowano test do jej wykrycia. Test daje wynik pozytywny u 97% chorych i 1% zdrowych. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana osoba jest chora, jeśli test tej osoby dał wynik pozytywny.
11. Rozporządzamy trzynastoma urnami: Y_1, \dots, Y_{13} , przy czym Y_i zawiera i białych oraz $13 - i$ czarnych kul, $i = 1, \dots, 13$. Wybieramy jedną z tych urn, przy czym prawdopodobieństwo wybrania każdej z nich jest proporcjonalne do liczby znajdujących się w niej białych kul. Z wybranej urny losujemy dwie kule, które okazują się różnych kolorów. Do której z urn należą z największym prawdopodobieństwem te dwie kule?
12. Mamy 40 kur - 30 białych i 10 czarnych. Kury zaganiamy do dwóch kurników - do każdego kurnika po 20 kur, a następnie z obu kurników wybieramy losowo po jednej kurze. Uzasadnij, że prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kur o różnych kolorach upierzenia będzie najmniejsze wtedy, gdy do obu kurników zagnamy po piętnaście białych i po pięć czarnych kur.

13. W loterii fantowej zorganizowanej na balu szansa wygranej jest równa p , przegranej - q , a z prawdopodobieństwem r wyciągamy los "graj dalej". Los "graj dalej" wrzucamy z powrotem do urny i dokonujemy ponownego losowania. Jakie jest prawdopodobieństwo wygranej?
14. Jaś i Grześ rzucają na przemian monetą. Jaś wygrywa, gdy pojawią się kolejno OOR, Grześ - gdy ROR. Jakie są prawdopodobieństwa wygranej dla obu chłopców?
15. Jest n osób: A_1, A_2, \dots, A_n . Osoba A_1 dostaje kartkę ze znakiem $+$. Z prawdopodobieństwem p , $0 < p < 1$, zmienia znak na przeciwny i podaje kartkę osobie A_2 , która z prawdopodobieństwem p zmienia znak na przeciwny i podaje kartkę osobie A_3 , itd. Na zakończenie, po oddaniu kartki przez osobę A_n , zaobserwowano znak $+$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że osoba A_1 nie zmieniła znaku.

zadania do samodzielnego rozwiązania:

1. Rzucamy dwiema kostkami. Jakie jest prawdopodobieństwo, że przynajmniej na jednej kostce wypadła szóstka, jeśli wiadomo, że suma otrzymanych oczek wynosi co najmniej 9?
2. Mamy 5 urn typu A i 7 urn typu B. W każdej z urn typu A jest po 7 kul białych, 3 czarnych i 5 niebieskich, a w każdej z urn typu B: 4 białe, 4 czarne i 7 niebieskich. Z losowo wybranej urny wzięto dwie kule.
 - a) Obliczyć prawdopodobieństwo wylosowania kul różnokolorowych.
 - b) Wylosowano kule jednakowego koloru. Oblicz prawdopodobieństwo, że pochodziły z urny typu A.
3. Dane są dwie urny A i B. Urna A zawiera 17 kul białych, 3 czarne i 4 niebieskie, zaś urna B 10 białych, 5 czarnych i 15 niebieskich. Rzucamy kostką do gry, a następnie losujemy dwie kule z urny zgodnie z następującą regułą: *Jeśli w pierwszym rzucie wypadły jedno lub dwa oczka losujemy z urny A, a jeśli 3,4,5 to z urny B. Natomiast gdy wypadło sześć oczek, to rzucamy ponownie i dokonujemy losowania urny zgodnie z regułą podaną dla pierwszego rzutu kostką z tym, że w przypadku wyrzucenia 6 losujemy również z urny B.* Obliczyć prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul różnych kolorów.
4. Ze zbioru liczb $Z = \{1, 2, \dots, 100\}$ wybieramy losowo dwie liczby, a następnie z pozostałych dwóch znów wybieramy dwie liczby. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na wylosowaniu za drugim razem co najmniej jednej liczby parzystej.