

ćwiczenia z rachunku prawdopodobieństwa  
matematyka finansowa, II rok  
lista 6

1. Rzucamy kostką, zmienna losowa  $X$  przyjmuje wartość 0 jeśli liczba wyrzuconych oczek jest podzielna przez 3, 1 gdy liczba wyrzuconych oczek przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1, 2 gdy liczba wyrzuconych oczek przy dzieleniu przez 3 daje resztę 2. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej  $X$ .
2. Przeznaczona do odbioru partia towaru zawiera jednakową liczbę sztuk I, II i III gatunku. Niech  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  oznaczają zdarzenia elementarne w doświadczeniu polegającym na wylosowaniu z tej partii towaru sztuki odpowiednio I, II, III gatunku. Zmienne losowe  $X, Y$  określamy w sposób następujący:

$$X(\omega_1) = 2, X(\omega_2) = 1, X(\omega_3) = 0$$

$$Y(\omega_1) = 0, Y(\omega_2) = 1, Y(\omega_3) = 2$$

Porównać rozkłady zmiennych losowych  $X, Y$ . Wyznaczyć ich dystrybuanty. Czy zmienne losowe  $X$  i  $Y$  są równe?

3. Z pęku  $n$  kluczy wybierany jest jeden i pasowany do zamka. Klucz, który nie pasuje jest odkładany, a z pozostałych jest losowany kolejny klucz. Wartością zmiennej losowej  $X$  jest numer tej próby, w której klucz pasuje do zamka. Wiadomo, że tylko jeden klucz otwiera zamek. Wyznaczyć rozkład  $X$ .
4. Rzucamy pięcioma symetrycznymi monetami. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe ilości wyrzuconych orłów. Podać rozkład zmiennej losowej.
5. Dane są 4 urny i 3 kule. Rozmieszczamy kule w urnach. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe ilości pustych urn. Obliczyć rozkład zmiennej losowej.
6. Losujemy  $n$  - krotnie (ze zwracaniem) liczbę spośród liczb od 1 do  $N$ .  $X$  największa spośród liczb uzyskanych w losowaniu. Obliczyć rozkład zmiennej losowej.
7. Dany jest odcinek  $\langle 0, L \rangle$  i punkt  $r$  należący do tego odcinka. Z odcinka losujemy dwa punkty  $x_1, x_2$ . Zmienna losowa  $X$  przyjmuje wartość 1, gdy punkt  $r$  znajduje się między wylosowanymi punktami oraz 0 w przeciwnym wypadku. Podać rozkład  $X$ .
8. Rzucamy dwoma kostkami i symetryczną monetą, na której znajdują się liczby  $-1, 1$ . Zmienna losowa  $X$  przyjmuje wartości równe sumie liczby wypadłej na monecie i wartości bezwzględnej różnicy wyrzuconych oczek. Podać rozkład zmiennej losowej.
9. Niech  $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$ ,  $P(\{\omega\}) = \frac{1}{4}$  dla  $\omega = 0, 1, 2, 3$ . Definiujemy dwie zmienne losowe  $X(\omega) = \sin \frac{\pi\omega}{2}$  oraz  $Y(\omega) = \cos \frac{\pi\omega}{2}$ . Znaleźć rozkłady i dystrybuanty zmiennych losowych  $X$  i  $Y$ . Obliczyć  $P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = Y(\omega)\})$ .
10. Z talii 52 kart wyciągamy 6 i takiemu losowaniu przypisujemy liczbę pików. Znaleźć rozkład określonej w ten sposób zmiennej losowej.
11. Dana jest gęstość określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & x \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \\ 0 & x \notin \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \end{cases}.$$

Nie licząc całki podać ile wynosi prawdopodobieństwo w punkcie  $\frac{\pi}{4}$ . Odpowiedź uzasadnij.

12. Dla jakich wartości  $a$  funkcja  $f(x) = ax^2 \mathbf{1}_{[0,2]}(x)$  jest gęstością?
13. Niech  $X$  ma rozkład o gęstości  $f(x) = \frac{a}{x^2+1}$ . Wyznaczyć wartość parametru  $a$  oraz obliczyć  $P(|X| > 1)$ ?
14. Niech  $X$  ma gęstość  $f(x) = ce^{-|x|}$ . Wyznaczyć  $c$  i  $P(X > -1)$ .
15. Niech  $X$  ma rozkład o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \in [-1, 0) \\ x, & x \in [0, 1] \\ 0, & x \notin [-1, 1] \end{cases}$$

Obliczyć prawdopodobieństwo, że  $|X - \frac{1}{8}| < \frac{5}{8}$ .

16. Wiemy, że zmienna losowa  $X$  ma rozkład wykładniczy z parametrem  $\lambda > 0$  i  $P(X < 2) = \frac{3}{4}$ . Obliczyć  $\lambda$ .

17. Zmienna losowa  $X$  ma rozkład jednostajny na zbiorze  $A = [-1, 0] \cup [2, 4]$ . Wyznaczyć gęstość i  $P(|X - \frac{3}{2}| < 2)$ .

18. Czy można dobrać parametr  $a$ , by funkcja:

a)  $f(x) = \frac{a}{x^2} \mathbf{1}_{(1, \infty)}(x)$ ;

b)  $g(x) = \frac{a}{x} \mathbf{1}_{(1, \infty)}(x)$ ;

c)  $h(x) = a\sqrt{x} \mathbf{1}_{(0, 3)}(x)$

była gęstością?