ćwiczenia z rachunku prawdopodobieństwa
ii rok informatyki i ekonometrii
lista 6

1. Rzucamy kostką, zmienna losowa X przyjmuje wartość 0 jeśli liczba wyrzuconych oczek jest podzielna przez 3, 1 gdy liczba wyrzuconych oczek przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1, 2 gdy liczba wyrzuconych oczek przy dzieleniu przez 3 daje resztę 2. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej X.

2. Przeznaczona do odbioru partia towaru zawiera jednakową liczbę sztuk I, II i III gatunku. Niech $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ oznaczają zdarzenia elementarne w doświadczeniu polegającym na wylosowaniu z tej partii towaru sztuki odpowiednio I, II, III gatunku. Zmienne losowe X, Y określamy w sposób następujący:
$$X(\omega_1) = 2,\ X(\omega_2) = 1,\ X(\omega_3) = 0$$
$$Y(\omega_1) = 0,\ Y(\omega_2) = 1,\ Y(\omega_3) = 2$$
Porównać rozkłady zmiennych losowych X, Y. Wyznaczyć ich dystrybuanty. Czy zmienne losowe X i Y są równe?

3. Z pęku n kluczy wybierany jest jeden i pasowany do zamka. Klucz, który nie pasuje jest odkładany, a z pozostałych jest losowany kolejny klucz. Wartością zmiennej losowej X jest numer tej próby, w której klucz pasuje do zamka. Wiadomo, że tylko jeden klucz otwiera zamek. Wyznaczyć rozkład X.

4. Rzucamy pięcioma symetrycznymi monetami. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe ilości wyrzuconych orłów. Podać rozkład zmiennej losowej.

5. Dane są 4 urny i 3 kule. Rozmieszczamy kule w urnach. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe ilości pustych urn. Obliczyć rozkład zmiennej losowej.

6. Losujemy n - krotnie (ze zwracaniem) liczbę spośród liczb od 1 do N. X największa spośród liczb uzyskanych w losowaniu. Obliczyć rozkład zmiennej losowej.

7. Dany jest odcinek $\langle 0, L\rangle$ i punkt r należący do tego odcinka. Z odcinka losujemy dwa punkty x_1, x_2. Zmienna losowa X przyjmuje wartość 1, gdy punkt r znajduje się miedzy wylosowanymi punktami oraz 0 w przeciwnym wypadku. Podać rozkład X.

8. Rzucamy dwoma kostkami i symetryczną monetą, na której znajdują się liczby -1,1. Zmienna losowa X przyjmuje wartości równe sumie liczby wypadłej na monecie i wartości bezwzględnej różnicy wyrzuconych oczek. Podać rozkład zmiennej losowej.

9. Niech $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$, $P(\{\omega\}) = \frac{1}{4}$ dla $\omega = 0, 1, 2, 3$. Definiujemy dwie zmienne losowe $X(\omega) = \sin\frac{\pi\omega}{2}$ oraz $Y(\omega) = \cos\frac{\pi\omega}{2}$. Znaleźć rozkłady i dystrybuanty zmiennych losowych X i Y. Obliczyć $P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = Y(\omega)\})$.

10. Z talii 52 kart wyciągamy 6 i takiemu losowaniu przypisujemy liczbę pików. Znaleźć rozkład określonej w ten sposób zmiennej losowej.

11. Dana jest gęstość określona wzorem
$$f(x) = \begin{cases} \cos x & x \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle \\ 0 & x \notin \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle \end{cases}.$$
Nie licząc całki podać ile wynosi prawdopodobieństwo w punkcie $\frac{\pi}{4}$. Odpowiedź uzasadnij.

12. Dla jakich wartości a funkcja $f(x) = ax^2\mathbf{1}_{[0,2]}(x)$ jest gęstością?

13. Niech X ma rozkład o gęstości $f(x) = \frac{a}{x^2+1}$. Wyznaczyć wartość parametru a oraz obliczyć $P(|X| > 1)$?

14. Niech X ma gęstość $f(x) = ce^{-|x|}$. Wyznaczyć c i $P(X > -1)$.

15. Niech X ma rozkład o gęstości
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \in [-1, 0) \\ x, & x \in [0, 1] \\ 0, & x \notin [-1, 1] \end{cases}$$
Obliczyć prawdopodobieństwo, że $|X - \frac{1}{8}| < \frac{5}{8}$.

16. Wiemy, że zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy z parametrem $\lambda > 0$ i $P(X < 2) = \frac{3}{4}$. Obliczyć λ.

17. Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny na zbiorze $A = [-1, 0] \cup [2, 4]$. Wyznaczyć gęstość i $P(|X - \frac{3}{2}| < 2)$.

18. Czy można dobrać parametr a, by funkcja:

   a) $f(x) = \frac{a}{x^2}\mathbf{1}_{(1,\infty)}(x)$;

   b) $g(x) = \frac{a}{x}\mathbf{1}_{(1,\infty)}(x)$;

   c) $h(x) = a\sqrt{x}\mathbf{1}_{(0,3)}(x)$

   była gęstością?