**probabilistyka**
**matematyka, II stopień**
**lista 5**

1. W 10-cio elementowej partii pewnego towaru są 2 sztuki wadliwe. Wylosowano bez zwrotu 2 sztuki. Niech zmienna losowa $X$ przyjmuje wartości równe liczbie sztuk wadliwych wśród 2 wylosowanych sztuk, zaś $Y$ przyjmuje wartość 1, jeśli pierwsza wylosowana sztuka jest wadliwa, oraz 0, jeśli nie jest wadliwa. Obliczyć $P(X+Y=2)$ oraz $E(X+Y)$.

2. Niech $X \sim Poisson(\lambda_1)$, $Y \sim Poisson(\lambda_2)$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej $X+Y$. Rozwiązanie uogólnić na dowolną sumę rozkładów Poissona.

3. Niech $X_1, X_2$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach odpowiednio $N(m_1, \sigma_1)$, $N(m_2, \sigma_2)$. Znaleźć gęstość zmiennej losowej $X_1 + X_2$.

4. Niech zmienne losowe $X, Y$ będą niezależne i mają jadnakowe rozkłady $Exp(1)$, i niech $U = X+Y$, $V = \frac{X}{X+Y}$. Znaleźć
   - gęstość zmiennej losowej $U$;
   - gęstość zmiennej losowej $V$;
   - czy zmienne $U, V$ są niezależne ?

5. Niech $X$ i $Y$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach odpowiednio $Exp(\lambda)$ oraz $U[0,1]$. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej $Z = X+Y$.

6. Niech zmienna losowa $X$ ma rozkład równomierny dwupunktowy i $W_X = \{0, 1\}$, natomiast zmienna losowa $Y$ ma rozkład $U[0,1]$. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej $Z = X+Y$. Zakładamy niezależność zmiennych losowych $X, Y$.

7. Każdy z dwóch odcinków o długości $a$ podzielono losowo wybranym punktem na 2 części. Zakładając, że długości krótszych odcinków są zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym, obliczyć prawdopodobieństwo, że suma długości krótszych odcinków spełnia nierówność $\frac{1}{4}a \leq S \leq \frac{3}{4}a$.

8. Zakładając, że zmienne losowe $X$ i $Y$ są niezależne i mają te same rozkłady geometryczne z parametrem $p$, wyznaczyć rozkład zmiennej losowej $Z = X+Y$.

9. $X$ i $Y$ są niezależnymi, stadnaryzowanymi zmiennymi losowymi o rozkładzie normalnym. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej $Z = X^2 + Y^2$.

10. Wykazać, że kompozycja niezależnych rozkładów gamma jest również rozkładem gamma.

11. Znaleźć kompozycję dwóch niezależnych rozkładów jednostajnych na odcinku $[0,1]$.

12. Dwuwymiarowa zmienna losowa $(X, Y)$ ma rozkład o gęstości
$$f(x,y) = \frac{\sqrt{5}}{2\pi} \exp[-\frac{1}{2}(x^2 + 2xy + 5y^2)].$$
Wyznaczyć łączny rozkład układu zmiennych losowych $(U, V)$, gdzie $U = X+Y$ i $V = X-Y$.

13. $X, Y$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie wykładniczym. Wykazać, że zmienne $X+Y$, $\frac{X}{Y}$ są niezależnymi zmiennymi losowymi.

14. Niech niezależne zmienne losowe $X, Y$ mają rozkład wykładniczy z parametrem $\lambda$. Wyznaczyć $E(X+Y)$ oraz $E(X-Y)$.

15. **[E.A. 5.10.2009]** Niech $X$ i $Y$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie wykładniczym z parametrem $\lambda = 1$. Niech $U = 2X+Y$ i $V = X-Y$. Wtedy prawdopodobieństwo $P(U \in (0,6) \wedge V \in (0,6))$ jest równe:
a) $1 - 2e^{-1}$ b) $\frac{1}{2}(4e^{-3} - 3e^{-4})$ c) $\frac{1}{2}(1 - 4e^{-3} + 3e^{-4})$ d) $1 - e^{-3}$