procesy stochastyczne
I rok matematyki II-go stopnia
lista 6

1. Niech (U_n) będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie,
$$P(U_n = 1) = P(U_n = -1) = \frac{1}{2}$$
Czy $X_n = U_n \cdot U_{n+1}$ jest łańcuchem Markowa?

2. Niech (U_n) będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie,
$$P(U_n = 1) = P(U_n = -1) = \frac{1}{2}$$
Czy $Y_n = \frac{U_n + U_{n+1}}{2}$ jest łańcuchem Markowa?

3. W chwili 1 umieszczono cząstkę fizyczną w punkcie 5 osi liczbowej. Co jednostkę czasu cząstka przesuwa się o jedność na prawo z prawdopodobieństwem p lub na lewo z prawdopodobieńswtem $q = 1 - p$, z tym że gdy się znajdzie w punkcie 1, to w następnej chwili nie może przesunąć się na lewo (w punkcie 1 jest ścianka) i z prawdopodobieństwem q pozostaje w tym samym punkcie. Wyznaczyć macierz przejścia łańcucha Markowa związanego z opisanym wieloetapowym doświadczeniem.

4. W chwili 1 umieszczono cząstke fizyczną w punkcie 2 osi liczbowej. Co jednostkę czasu cząstka przesuwa się o jedność na prawo z prawdopodobieństwem p lub na lewo z prawdopodobieńswtem $q = 1 - p$, z tym że gdy się znajdzie w punkcie 1, to w następnej chwili nie może przesunąć się na lewo (w punkcie 1 jest ścianka) i z prawdopodobieństwem q pozostaje w tym samym punkcie, natomiast gdy gdy znajdzie się w punkcie 5 zostaje tam na zawsze. Wyznaczyć macierz przejścia łańcucha Markowa związanego z opisanym wieloetapowym doświadczeniem

5. Rozpatrzmy cząstkę fizyczną, która co jednostkę czasu może zmieniać swoje położenie na prostej zgodnie z następującą miacierzą przejśćia:
$$P = \begin{pmatrix} q & p & 0 \\ q & 0 & p \\ 0 & q & p \end{pmatrix} \qquad 0 < p < 1,\ q = 1 - p$$
Przyjmijmy ponadto, że w chwili 1 cząstka jest umieszczana w jednym z punktów $1, 2, 3$ zgodnie z pewnym rozkładem początkowym $p_1(1), p_2(1), p_3(1)$. Obliczyć
   a) prawdopodobieństwo tego, że stan układu będzie przez trzy pierwsze etapy pozostawał ten sam;
   b) prawdopodobieństwo tego, że stan układu w chwili 3 będzie taki sam jak w chwili 1;
   c) prawdopodobieństwo tego, że w chwili 3 układ znajdzie się w stanie 1.

6. Seminarium probabilistyczne jest organizowane przez matematyków z Torunia, Warszawy i Wrocławia. Na zakończenie każdego spotkania losuje się z równymi prawdopodobieństwami miejsce następnego spośród dwóch pozostałych ośrodków. Podać macierz przejścia odpowiedniego łańcucha Markowa, obliczyć prawdopodobieństwa znalezienia się w poszczególnych stanach w chwili n i ich granice przy $n \to \infty$.

7. Wykazać, że jeżeli P jest macierzą stochastyczną, to P^n też jest macierzą stochastyczną.

8. Łańcuch Markowa o dwu stanach $S = \{0, 1\}$, ma macierz przejścia

$$P = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{pmatrix}$$

. Pokazać, że jeśli $p_{00} \neq 1$ lub $p_{11} \neq 1$, to

$$P(n) = \frac{1}{2 - p_{00} - p_{11}} \begin{pmatrix} 1 - p_{11} & 1 - p_{00} \\ 1 - p_{11} & 1 - p_{00} \end{pmatrix} + \frac{(p_{00} + p_{11} - 1)^n}{2 - p_{00} - p_{11}} \begin{pmatrix} 1 - p_{00} & -(1 - p_{00}) \\ -(1 - p_{11}) & 1 - p_{11} \end{pmatrix}$$

.

9. Niech X_n będzie błądzeniem przypadkowym na prostej, $X_0 = 0$. Znaleźć macierz przejścia dla $Y_n = |X_n|$.

10. Mamy trzy urny U_1, U_2, U_3 z kulami. W urnie U_i jest k_i kul białych i l_i kul czarnych $(i = 1, 2, 3)$. w etapie pierwszym wybieramy kulę z urny U_1. Jeżeli wybierzemy kulę białą, to w etapie drugim wybieramy kulę z urny U_2, a jeżeli czarną to z urny U_3. W każdym kolejnym r-tym etapie wybieramy kulę z urny U_2, gdy w poprzednim $(r-1)$-szym etapie wybraliśmy kulę białą, i z urny U_3, gdy wybraliśmy kulę czarną. Wyznaczyć rozkład X_3, gdzie X_n zmienna losowa przyjmująca wartości równe numerowi urny, z której losujemy n-tym etapie.

11. Niech $S = \{1, 2, 3, 4\}$. Przeprowadzić klasyfikację stanów łańcucha Markowa o macierzy przejścia

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad \text{b)} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{c)} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

12. Udowodnić, że łańcuch Markowa jest nieprzywiedlny wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór stanów S nie ma właściwych podzbiorów zamkniętych.