ćwiczenia z rachunku prawdopodobieństwa
matematyka, III rok
lista 6 (niezależność zdarzeń, schemat Bernoulliego)

1. Niech zdarzenia A, B są niezależne. Udowodnić, że są niezależne następujące zdarzenia
   - A, B';
   - A', B;
   - $A, \emptyset$;
   - A, Ω;
   - $A, B \cup C$ jeśli $B \cap C = \emptyset$, A i C są niezależne;
   - A', B'.
2. Niech $P(A/B) = P(A/B')$ oraz $P(B) > 0, P(B') > 0$. Udowodnić, że zdarzenia A, B są niezależne.
3. Niech $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_7\}, \Sigma = 2^\Omega, P(\omega_i) = \frac{1}{7}$. Czy można określić w (Ω, Σ, P) dwa zdarzenia A, B niezależne takie, że $0 < P(A) < 1$ i $0 < P(B) < 1$?
4. Podać przykład zdarzeń niezależnych A_1, A_2, A_3 takich, że $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{2}$.
5. Niech $A \subseteq B$, A i C oraz B i C są niezależne Wtedy $B \setminus A$ i C są również niezależne.
6. Wykaż, że jeśli $P(A) = a, P(B) = b$, gdzie $b \neq 0$, to $P(A \mid B) \geq 1 - \frac{1-a}{b}$.
7. Co jest bardziej prawdopodobne: wygrać z równorzędnym przeciwnikiem
   - 2 partie z 3, czy
   - 3 partie z 5 ?
8. Ile razy należy rzucić kostką, aby prawdopodobieństwo wypadnięcia "5" było niemniejsze niż $\frac{1}{2}$?
9. Z kuli o promieniu R wylosowano N punktów. Wyznaczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że odległość od środka kuli do najbliżej położonego punktu jest większa lub równa $a, 0 < a < R$..
10. Rzucono 10 razy kostką. Jaka jest szansa otrzymania:

    a) 6 oczek co najmniej raz?

    b) 5 oczek dokładnie 3 razy?
11. Rzucono 10 razy symetryczną kostką. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w pierwszym rzucie otrzymano szóstkę, jeśli wiadomo, że otrzymano 3 szóstki?
12. Obliczyć najbardziej prawdopodobną liczbę błędów ujemnych i dodatnich przy czterech pomiarach i wyznaczyć odpowiednie prawdopodobieństwa, jeśli przy dowolnym pomiarze prawdopodobieństwo błędu dodatniego jest równe $\frac{2}{3}$, a prawdopodobieństwo błędu ujemnego jest równe $\frac{1}{3}$.
13. Rzucono 100 razy kostką do gry. Jaka jest najbardziej prawdopodobna ilość wyrzuconych piątek?
14. Najbardziej prawdopodobną liczbą detali dobrej jakości w partii złożonej z 90 detali jest 82. Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrany detal z tej partii będzie dobrej jakości?
15. Przeprowadzono serię doświadczeń według schematu Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu w każdym doświadczeniu równym p. Obliczyć prawdopodobieństwo uzyskania r-tego sukcesu dokładnie w $(k + r)$-tym doświadczeniu, $k = 0, 1, 2, \dots$
16. Obliczyć prawdopodobieństwo otrzymania parzystej liczby sukcesów w ciągu n prób Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu w pojedynczej próbie równym p.
17. **(Problem Banacha)** Pewien matematyk nosi w kieszeni dwa pudełka zapałek. Za każdym razem, gdy potrzebuje zapałki, bierze ją z losowo wybranego pudełka. Po pewnym czasie, wybierając jedno z pudełek, stwierdzi on, że jest ono puste. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w tym momencie drugie pudełko będzie zawierało k zapałek, jeśli na początku każde pudełko zawierało n zapałek?

18. Owad składa k jajeczek z prawdopodobieństwem $\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, $\lambda > 0$. Potomek wylęga się z jaja z prawdopodobieństwem p, niezależnie od innych. Znaleźć prawdopodobieństwo, że liczba potomków będzie równa l.

zadania do samodzielnego rozwiązania:

1. Rzucamy dwiema kostkami, określając trzy zdarzenia: A - nieparzysta ilość oczek na pierwszej kostce, B - nieparzysta ilość oczek na drugiej kostce, C - nieparzysta suma oczek. Czy zdarzenia A, B, C są niezależne parami? Czy są niezależne?

2. Na odcinku $[0,1]$ umieszczamy losowo i niezależnie punkty x i y. Niech A będzie zdarzeniem polegającym na tym, że $x^2 + y^2 \leq 1$, natomiast B zdarzeniem polegającym na tym, że $x < y$. Czy zdarzenia A i B są niezależne?

3. Które ze zdarzeń jest bardziej prawdopodobne:
   - w 4 rzutach kostką wypadnie chociaż raz 6 oczek
   - w 24 rzutach dwoma kostkami chociaż raz wypadnie para (6,6).

4. Wiadomo, że w trakcie n rzutów monetą przynajmniej raz wypadł orzeł. Wyznaczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że liczba orłów jest większa lub równa 2.

5. Ile doświadczeń według schematu Bernoulliego musimy przeprowadzić, aby najbardziej prawdopodobna liczba sukcesów była równa 51, jeśli prawdopodobieństwo sukcesu w pojedynczym doświadczeniu wynosi $p = 0,64$?

6. Obliczyć prawdopodobieństwo, że w ciągu doświadczeń według schematu Bernoulliego uzyskamy a sukcesów przed uzyskaniem b porażek.

7. Niech przed dokonaniem doświadczenia istnieją dwie równoprawdopodobne i jedynie możliwe hipotezy dotyczące prawdopodobieństwa sukcesu w pojedynczym doświadczeniu: $p = \frac{1}{2}$ i $p = \frac{2}{3}$. Która z tych hipotez ma większe prawdopodobieństwo a posteriori, jeżeli po przeprowadzeniu 200 niezależnych doświadczeń uzyskano 116 sukcesów?

8. Urna zawiera l białych, m zielonych i n czerwonych kul. Losujemy kolejno ze zwracaniem $l_1+m_1+n_1$ kul. Obliczyć prawdopodobieństwo, że wylosujemy:
   a) najpierw l_1 białych kul, potem m_1 zielonych, a na końcu n_1 czerwonych kul;
   b) l_1 białych, m_1 zielonych i $n_!$ czerwonych kul, przy czym kule tego samego koloru wylosowane będą kolejno, ale kolejność kolorów może być dowolna;
   c) l_1 białych, m_1 zielonych i n_1 czerwonych kul w dowolnej kolejności.