ćwiczenia z rachunku prawdopodobieństwa
matematyka, III rok
lista 6

1. Rzucamy 180 razy kostką do gry. Obliczyć prawdopodobieństwo, że otrzymamy 32 razy szóstkę.
2. Korzystając z twierdzenia Moivre'a - Laplace'a oszacować prawdopodobieństwo, że w 720 rzutach kostką ilość szóstek będzie
   - zawierać się pomiędzy 121 a 140
   - mniejsza niż 125
   - większa niż 110
3. Wykonujemy 1000 rzutów symetryczną kostką. Korzystając z twierdzenia Moivre'a - Laplace'a oszacować przedział, w jaki z prawdopodobieństwem 0,9 wpada ilość otrzymanych szóstek.
4. Wydział Matematyki pragnąłby przyjąć nie więcej niż 120 kandydatów. Zdających jest 250, a szansa zaliczenia testu wynosi 0,4. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wydział będzie miał kłopot z nadmiarem kandydatów?
5. Prawdopodobieństwo pojawienia się zdarzenia w jednym doświadczeniu wynosi 0,3. Z jakim prawdopodobieństwem można twierdzić, że częstość tego zdarzenia przy 100 doświadczeniach będzie zawarta w granicach od 0,2 do 0,4?
6. Stosując twierdzenie Moivre'a-Laplace'a obliczyć prawdopodobieństwo tego, że w 800 niezależnych próbach ilość sukcesów będzie większa niż 150, a mniejsza niż 250, jeśli prawdopodobieństwo sukcesu w każdej próbie jest równe $\frac{1}{4}$.
7. Na campusie uniwersyteckim są dwie restauracje po 120 miejsc każda. Wiadomo, że codziennie 200 osób będzie chciało zjeść obiad a wybory restauracji dokonują losowo - powiedzmy, rzucając symetryczną monetą. Jaka jest szansa, że w którejś restauracji zabraknie miejsc? Ile miejsc należy przygotować w każdej restauracji, by powyższe prawdopodobieństwo było mniejsze od 0,001?
8. Prawdopodobieństwo pojawienia się zdarzenia w jednym doświadczeniu wynosi $0,3$. Z jakim prawdopodobieństwem można twierdzić, że częstość tego zdarzenia przy 100 doświadczeniach będzie zawarta w granicach od $0,2$ do $0,4$?
9. Józio założył się z Olkiem, że w 100 rzutach kostką uzyska w sumie nie mniej niż 400 oczek i w tym celu rozpoczął ćwiczenia. Ile serii po 100 rzutów musi średnio wykonać, żeby doczekać się takiego wyniku?
10. Rzucono 1000 razy kostką. Znaleźć prawdopodobieństwo, że suma oczek będzie zawarta między 3410 a 3590?
11. Na poczcie pojawia się 100 klientów dziennie, każdy z nich dokonuje wpłaty (bądź wypłaty) $X_i$, $i = 1, 2, \ldots 100$, gdzie $X_i$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie, zerowej średniej i wariancji równej $100^2$. Ile gotówki należy mieć w kasie rano, by z prawdopodobieństwem $0,99$ na koniec dnia nie zabrakło pieniędzy? Zakładamy, że w ciągu dnia ewentualne braki uzupełnia naczelnik, ale wieczorem chce odzyskać swoje pieniądze.
12. W Polsce jest $24,6$ mln podatników i każdy z nich myli się przy wypełnianiu zeznania podatkowego. Wartość błędu dla $i$-tego podatnika jest zmienna losową $X_i$, gdzie $E(X_i) = 0$ i $D^2(X_i) = 10000$ , czyli $D(X_i) = 100$ (złotych); ponadto zakładamy niezależność $X_i$. Jaka jest szansa, że straty państwa w wyniku tych błędów przekroczą 1 grosz na podatnika? A 3 grosze?
13. Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots,$ są niezależne i $P(X_k = k) = P(X_k = -k) = \frac{1}{2}$. Niech $s_n^2 = \sum_{k=1}^{n} D^2(X_k)$. Zbadać zbieżność według rozkładu ciągu
$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{s_n}.$$
14. Dane są ciągi $\{X_n\}$ i $\{Y_n\}$ niezależnych zmiennych losowych, przy czym $P(X_n = \frac{1}{n^\alpha}) = P(X_n = -\frac{1}{n^\alpha}) = p$, $P(X_n = 0) = 1 - 2p$, $0 < p < \frac{1}{2}$, $\frac{1}{3} < \alpha \leq \frac{1}{2}$, $P(Y_n = \sqrt{n}) = P(Y_n = -\sqrt{n}) = \frac{1}{2}$. Dowieść, że każdy z tych ciągów spełnia CTG.
15. Funkcja $p(x) = \frac{1}{3}$ dla $x \in (-1, 0)$, $p(x) = \frac{2}{3}$ dla $x \in [0, 1)$ i $p(x) = 0$ dla $x \notin (-1, 1)$ jest gęstością każdej z niezależnych zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots$ Znaleźć przybliżoną wartość prawdopodobieństwa $P(S_n < 13)$ dla $n = 60$.
16. Każda z niezależnych zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots X_n$ ma ten sam rozkład oraz wariancję równą 5.

a) Znaleźć prawdopodobieństwo, że średnia arytmetyczna tych zmiennych $\frac{S_n}{n}$ różni się dla $n = 4500$ o co najwyżej $0,04$ od wartości średniej $a = E(X_1)$.

b) Ile zmiennych losowych $X_k$ trzeba wziąć, aby z prawdopodobieństwem nie mniejszym od $0,9974$ różnica $|\frac{S_n}{n} - a|$ nie przekraczała $0,01$?

17. Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne, mają ten sam rozkład i $E(X_1) = 0$, $D^2(X_1) = 1$. Wykazać, że

$$U_n = \frac{\sqrt{n}(X_1 + \ldots + X_n)}{X_1^2 + \ldots + X_n^2} \longrightarrow \mathcal{N}(0,1)$$

18. Załóżmy, że zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots X_{735}$ oraz $Y_1, Y_2, \ldots Y_{880}$ są niezależne o rozkładach:
$P(X_i = 0) = \frac{3}{7}$, $P(X_i = 1) = \frac{4}{7}$, $P(Y_i = 0) = P(Y_i = 1) = \frac{1}{2}$.
Prawdopodobieństwo tego, że

$$\sum_{i=1}^{735} X_i < \sum_{i=1}^{880} Y_i$$

policzone w przybliżeniu przy pomocy aproksymacji rozkładem normalnym wynosi:
A) $0,01$; B) $0,99$; C) $0,16$; D) $0,50$; E) $0,84$.

19. Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[0,2]$. Niech

$$Y_n = X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_n.$$

Która z następujących równości jest prawdziwa?
A) $\lim_{n\to\infty} P(Y_n \leq 1) = 0$,
B) $\lim_{n\to\infty} P(Y_n \leq 1) = \frac{1}{2}$,
C) $\lim_{n\to\infty} P(Y_n \leq (\frac{2}{e})^n) = 0$,
D) $\lim_{n\to\infty} P(Y_n \leq (\frac{2}{e})^n) = \frac{1}{2}$,
E) $\lim_{n\to\infty} P(Y_n \leq (\frac{2}{e})^n) = 1$,
Wskazówka: Wykorzystaj Centralne Twierdzenie Graniczne.