

Statystyka
Matematyka finansowa, II rok
Lista nr 6

Weryfikacja hipotez statystycznych, cz.1

Testy parametryczne

1. W urnie jest 7 kul, w tym Q białych i pozostałe czarne. W celu zweryfikowania hipotezy $H_0 : Q = 3$ wobec $H_1 : Q = 5$ losuje się bez zwracania 2 kule i odrzuca się H_0 , jeśli obydwie są białe. Obliczyć prawdopodobieństwa popełnienia błędów I i II rodzaju.
2. Rozwiązać poprzednie zadanie przy założeniu, że losowanie odbywa się ze zwracaniem.
3. Zmienna losowa X ma rozkład o gęstości $f_\theta(x) = \frac{1}{\theta}$, $x \in (0, \theta)$, gdzie θ jest nieznanym parametrem. Niech c będzie ustaloną dodatnią liczbą. Test polega na tym, że jeśli $X \geq c$, to należy przyjąć hipotezę $H : \theta = 4$, a gdy $X < c$, należy przyjąć hipotezę $K : \theta = 2$. Obliczyć:
 - a) prawdopodobieństwo błędów I i II rodzaju (α i β);
 - b) moc testu;
 - c) β , gdy $\alpha = 0,05$.
4. Czas pracy pewnego rodzaju baterii ma rozkład $N(m, 70)$. Na poziomie istotności $\alpha = 0,05$ zweryfikować hipotezę, że przeciętny czas pracy tego typu baterii wynosi ponad 500 godz., jeśli dla 16 losowo wybranych baterii otrzymano $\bar{X} = 560$ godz.
5. Zakłada się, że „długość życia” opon samochodowych ma rozkład normalny. Producent twierdzi, że wartość przeciętna tej charakterystyki jest równa 50 tys. km. Na podstawie 100 losowo wybranych opon otrzymano $\bar{X} = 45$ tys. km i $s = 8$ tys. km. Czy na poziomie istotności $\alpha = 0,05$ można uważać, że producent ma rację?
6. W zakładzie A dla losowo wybranych 10 pracowników otrzymano średni wiek 32 lata i odchylenie standardowe $s = 4$ lata. Czy można uważać (przy założeniu, że wiek pracowników ma rozkład normalny) że przeciętny wiek pracownika w tym zakładzie jest istotnie wyższy od 30 lat? Poziom istotności $\alpha = 0,05$.
7. W celu sprawdzenia, czy po dokonaniu usprawnienia w silniku samochodowym zmalało zużycie paliwa, przeprowadzono jazdy próbne i otrzymano następujące wyniki:
przed usprawnieniem: 5.7, 6.5, 6.1, 5.5, 5.0, 6.1, 6.2, 5.9 (l/100 km);
po usprawnieniu: 4.9, 5.0, 4.7, 5.0, 5.0, 4.0 (l/100 km).
Założmy, że zużycia paliwa są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach normalnych o równych wariancjach. Na poziomie istotności $\alpha = 0,1$ zweryfikować hipotezę o jednakowym średnim zużyciu paliwa przed i po zmianie, przeciwko hipotezie mówiącej o mniejszym zużyciu paliwa po przeróbkach.
8. Przyjęto, że stopy zwrotu z inwestycji A i B są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie normalnym z tą samą wariancją. Poprzednie stopy zwrotu były równe (w %):
 A : 10, 15, 0, 1, 12, 7, 7, 8, 11, 12, 11, 14, 11, 8, 3, -2, 2.
 B : 20, -10, 5, 9, -3, -12, -5, 1, 1, 6, 5, 16.
Na poziomie istotności $\alpha = 0,05$, zweryfikować hipotezę, że oczekiwane stopy zwrotu z obu inwestycji są jednakowe przeciwko hipotezie, że oczekiwana stopa zwrotu inwestycji B jest większa.

9. Miesięczne wydatki na żywność w przeliczeniu na jedną osobę w gospodarstwach pracowniczych (w PLN) mają rozkład normalny. Na podstawie badania 400 losowo wybranych gospodarstw stwierdzono, że średnie wydatki w tej grupie wynoszą 250 PLN ze współczynnikiem zmienności równym 40%.
- Czy na podstawie poniższych danych, zakładając prawdopodobieństwo popełnienia błędu I rodzaju na poziomie 0.05, można uznać, że średnie wydatki na żywność ogółu gospodarstw nie przekraczają 240 PLN?
 - Przy jakim poziomie istotności podjęta decyzja weryfikacyjna ulegnie zmianie?
10. Rozkład tygodniowego czasu poświęconego na naukę poza uczelnią studentów I roku studiów dziennych SGH jest rozkładem $N(m, 5)$, natomiast w rozkładzie normalnym tygodniowego czasu studentów II roku odchylenie standardowe wynosi 6 godz. Pobrano niezależnie 10-elementową próbę studentów I roku oraz 24-elementową studentów II roku; średnie w tych próbach wynosiły odpowiednio: 20 godz. oraz 15 godz.
- Czy na poziomie istotności 0.1, można przyjąć, iż średni czas nauki poza uczelnią ogółu studentów I roku jest wyższy niż na roku II?
 - Do jakiego przedziału liczbowego powinny należeć wartości odpowiedniej statystyki, aby nie było podstaw do odrzucenia weryfikowanej hipotezy?
11. W zbadanej losowo próbie 120 rodzin zamieszkałych w Warszawie średnie wydatki na mieszkanie w ciągu miesiąca wynosiły 200 PLN z odchyleniem standardowym równym 80 PLN. W podobnej 100-elementowej próbie rodzin zamieszkałych w Łodzi średnie wydatki wynosiły 180 PLN, a odchylenie standardowe - 60 PLN.
- Czy otrzymane wyniki potwierdzają przypuszczenie, że średnie wydatki na mieszkanie w Warszawie są wyższe niż w Łodzi?
 - Do jakiego przedziału liczbowego powinny należeć wartości odpowiedniej statystyki, aby nie było podstaw do odrzucenia weryfikowanej hipotezy?
12. Obserwując liczbę kilometrów, jaką w ciągu roku przebywają prywatne samochody osobowe, otrzymano w losowej próbie 100 samochodów $\bar{X}=12500$ km i $s=2400$ km. Na poziomie istotności $\alpha = 0.05$ zweryfikować hipotezę, że przeciętna ilość kilometrów przebytych rocznie przez prywatny samochód wynosi 12000 km.
13. Na podstawie 10-elementowej próby prostej oszacowano średni czas toczenia pewnego detalu na tokarce I równy 27 min i odchylenie standardowe 5 min. Na poziomie istotności $\alpha = 0,05$ zweryfikować hipotezę, że wariancja czasu toczenia na tej tokarce wynosi 20 $(min)^2$, przy założeniu, że czas toczeniu detalu ma rozkład normalny.
14. Stalowe obręcze produkowane są na dwóch maszynach: A i B. Kontroler jakości uważa, że obręcze produkowane przez maszynę A mają średnicę istotnie większą od średnicy obręczy produkowanych przez maszynę B. Zakładamy, że rozkłady średnic obręczy dla maszyn A i B są: $N(m_1, \sigma_1)$ i $N(m_2, \sigma_2)$ oraz $\sigma_1 = \sigma_2$. Sprawdzić, czy kontroler jakości ma rację, jeśli dla 10 losowo wybranych obręczy z maszyny A otrzymano $\bar{X}_1=1.051$ i $s_1^2=0.000397$, a dla 15 obręczy z maszyny B mamy $\bar{X}_2=1.036$ i $s_2^2=0.00021$. Poziom istotności $\alpha = 0,01$.
15. Zweryfikować hipotezę, że 30% Polaków pali papierosy, jeżeli w próbie 400 osób okazało się, że pali 160 osób. Przyjmując poziom istotności $\alpha = 0,02$.

16. Zweryfikować hipotezę, że odsetek osób z wyższym wykształceniem w Polsce i we Francji jest taki sam, jeżeli w Polsce wylosowano 200 osób, w tym 38 miało wyższe wykształcenie a we Francji wylosowano 100 osób, w tym 25 miało wyższe wykształcenie. Przyjąć poziom istotności $\alpha = 0,05$.