ćwiczenia z rachunku prawdopodobieństwa
matematyka finansowa, II rok
lista 7

1. Z kwadratu o boku a losowany jest punkt. Wartością zmiennej losowej X jest odległość od najbliższego boku. Wyznaczyć rozkład X.

2. Dane są dwa koła współśrodkowe o promieniach 1 i 2. Z większego koła losujemy punkt. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe odległości punktu od mniejszego z okręgów Podać rozkład zmiennej losowej.

3. Z odcinka $[0, 1]$ losujemy dwie liczby. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej X przyjmującej wartości równe
   a) minimum z wylosowanych liczb;
   b) maksimum z wylosowanych liczb;
   c) sumie wylosowanych liczb.

4. Asia i Basia umówiły się między 16:00 a 17:00 w centrum miasta. Niech zmienna losowa X oznacza czas oczekiwania osoby, która przyszła pierwsza, na drugą. Wyznaczyć rozkład tej zmiennej losowej.

5. Z kwadratu $[0, 1]^2$ losujemy punkt (x, y). Zmienna losowa X przyjmuje wartości równe sumie współrzędnych wylosowanego punktu. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej X.

6. Czy można dobrać stałe a, b tak aby funkcja $F(x) = a \arctan x + b$ była dystrybuantą pewnego rozkładu ? Jeśli tak, to je podać wraz z uzasadnieniem.

7. Wyznaczyć zbiór wszystkich trójek a, b i c, dla których funckja

$$F(t) = \begin{cases} at^2, & t < 0, \\ bt + c, & 0 \le t < 2, \\ 1, & t \ge 2 \end{cases}$$

   jest
   a) dystrybuantą zmiennej losowej,
   b) dystrybuantą zmiennej losowej o rozkładzie dyskretnym,
   c) dystrybuantą zmiennej losowej o rozkładzie ciągłym.

8. Wyznaczyć dystrybuanty dla rozkładów opisanych w zadaniach z poprzedniej listy.

9. Funkcja

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ \frac{1}{4}, & -1 \le x < 1, \\ \frac{1}{2}, & 1 \le x < 2 \\ \frac{7}{8} & 2 \le x < 4 \\ 1 & x \ge 4. \end{cases}$$

   jest dystrybuantą zmiennej losowej X. Wtedy (odpowiedzieć *tak* lub *nie*):
   a) $P(X \le 2) > P(X > 2)$;
   b) $W_X = \{-1, 1, 2, 3\}$;
   c) $P(X = 3) = \frac{7}{8}$;
   d) $P(X^2 - 1 = 0) = \frac{1}{2}$.

10. Dystrybuanta zmiennej losowej X dana jest wzorem

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla} & t < 0 \\ 0,1 + t & \text{dla} & 0 \le t < 0,5 \\ 0,4 + t & \text{dla} & 0,5 \le t < 0,55 \\ 1 & \text{dla} & t \ge 0,55 \end{cases}$$

   Wyznaczyć $P(X = \frac{1}{2}), P(X \in [0, \frac{1}{2}]), P(X < 0,55)$.

11. Czy można dobrać parametr a tak, aby podane funkcje były gęstościami pewnego rozkładu zmiennej losowej? Odpowiedź uzasadnij. W przypadku odpowiedzi pozytywnej policzyć ich dystrybuanty.

    a) $f(x) = \begin{cases} ax & \text{dla } x \in \langle 0, 4 \rangle \\ 0 & \text{dla } x \notin \langle 0, 4 \rangle \end{cases}$;

    b) $f(x) = \begin{cases} ax & \text{dla } x \in \langle -1, 4 \rangle \\ 0 & \text{dla } x \notin \langle -1, 4 \rangle \end{cases}$;

    c) $f(x) = \begin{cases} ax^2 & \text{dla } x \in \langle 0, 3 \rangle \\ 0 & \text{dla } x \notin \langle 0, 3 \rangle \end{cases}$;

    d) $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}x \cdot (2 - x) & \text{dla } x \in \langle 0, a \rangle \\ 0 & \text{dla } x \notin \langle 0, a \rangle \end{cases}$;

12. Funkcje $f_i, i = 1, 2, 3$ są gęstościami rozkładów jednostajnych na odcinkach $(i - 1, i)$. Wtedy są gęstościami także funkcje (odpowiedzieć *tak* lub *nie*):

    a) $f_1 + f_2 + f_3$,
    b) $f_2 \cdot f_3$,
    c) $|f_3 - f_1|$,
    d) $\frac{1}{2} f_1 + \frac{1}{2} f_2$,
    e) $\max(f_1, f_2)$.

13. Zmienna losowa ma rozkład N(0,1). Oblicz prawdopodobieństwo

    - $P(\{X > 0\})$
    - $P(\{X > 2\})$
    - $P(\{|X| < 1\})$
    - $P(\{|X| > 1\})$
    - $P(\{0 < X < 3\})$
    - $P(\{-1 < X < 3\})$

14. Zmienna losowa ma rozkład N(1,2). Oblicz prawdopodobieństwo

    - $P(\{|X| > 3\})$
    - $P(\{X^2 \leq \frac{3}{4} + X\})$