

ćwiczenia z rachunku prawdopodobieństwa
matematyka, III rok
lista 7

1. Z odcinka $[0, 1]$ wybieramy losowo punkt M . Zmienna losowa X przyjmuje wartości równe długości odcinka OM . Obliczyć warunkową wartość oczekiwaną zmiennej X wiedząc, że

- a) $M \in (0, \frac{1}{3})$
- b) $M \notin (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$

2. Obliczyć wartość oczekiwaną liczby rzutów monetą aż do otrzymania n orłów pod rząd.

3. Z urny zawierającej bardzo dużą ilość białych i czarnych kul zmieszanych w równych ilościach wyciągamy kolejno 10 kul. Kule wyciągnięte do pierwszego pojawienia się kuli czarnej zwracamy do urny; pierwszą wyciągniętą kulę czarną i wszystkie następne wkładamy do drugiej początkowo pustej urny. Obliczyć wartość oczekiwaną ilości białych i czarnych kul w drugiej urnie.

4. Niech X będzie liczbą orłów otrzymanych przy dwukrotnym rzucie monetą, A - zdarzeniem polegającym na wypadnięciu orła w pierwszym rzucie. Obliczyć $E(X|\mathcal{F})$ gdzie $\mathcal{F} = \sigma(A)$.

5. Łączny rozkład zmiennych losowych dany jest tabelką

	$X = 1$	$X = 3$
$Y = 0$	0,2	0,3
$Y = 2$		0,4

Uzupełnić tabelkę, znaleźć $E(X|\sigma(Y))$.

6. Obliczyć wartość oczekiwaną liczby prób w schemacie Bernoulliego przeprowadzanych aż do monetu uzyskania kolejno:

- a) sukcesu i porażki;
- b) dwóch sukcesów i porażki.

7. Rzucamy 10 razy symetryczną monetą. Niech X oznacza łączną liczbę orłów, zaś Y liczbę orłów w pierwszych czterech rzutach. Znaleźć $E(X|Y)$.

8. Znaleźć rozkład warunkowy X pod warunkiem $X + Y = t$, jeśli X i Y są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie

- a) wykładniczym z parametrem λ ;
- b) Poissona z parametrem λ ;
- c) $\mathcal{N}(0, \sigma)$.

9. Niech (X, Y) ma rozkład o gęstości

$$f(x, y) = 8xy \mathbf{1}_{\{x>0, y>0, x^2+y^2<1\}}(x, y).$$

Znaleźć $E(Y|X = \frac{1}{2})$.

10. Dana jest gęstość prawdopodobieństwa układu zmiennych losowych nieujemnych

$$f(x, y) = kxy \exp(-(x^2 + y^2)) \quad (x \geq 0, y \geq 0).$$

Wyznaczyć $k, f(x|y), f(y|x)$.

11. Dana jest gęstość prawdopodobieństwa układu dwóch zmiennych losowych

$$f(x, y) = k \exp(-4x^2 - 6xy - 9y^2)$$

Wyznaczyć stałą k oraz gęstości warunkowe $f(x|y), f(y|x)$.

12. Współrzędne prostokątne X, Y, Z punktu losowego w przestrzeni mają rozkład normalny

$$f(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} abc} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)\right]$$

Wyznaczyć

- a) gęstość prawdopodobieństwa współrzędnych sferycznych tego punktu (R, Θ, Φ) , jeśli $x = r \cos \theta \cos \varphi$, $y = r \cos \theta \sin \varphi$, $z = r \sin \theta$
- b) gęstości warunkowe prawdopodobieństwa $f(r|\theta, \varphi)$ oraz $f(\varphi|r, \theta)$
13. Układ zmiennych losowych (X, Y) ma rozkład jednostajny wewnątrz kwadratu o boku a . Przekątne kwadratu pokrywają się z osiami współrzędnych. Wyznaczyć:
- a) gęstość prawdopodobieństwa układu (X, Y) ;
- b) gęstość prawdopodobieństwa każdej ze współrzędnych prostokątnych;
- c) gęstości warunkowe prawdopodobieństwa;
14. Układ zmiennych losowych (X, Y, Z) ma jednostajny rozkład prawdopodobieństwa wewnątrz kuli o promieniu R . Wyznaczyć dla punktów leżących wewnątrz kuli gęstość prawdopodobieństwa współrzędnej prostokątnej Z i warunkową gęstość prawdopodobieństwa $f(x, y|z)$.
15. Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi i niech $Z = X - Y$. Znaleźć $P(|Z| < 1 | X = 1)$, $F_{Z|Y}(0|1)$ jeśli X i Y mają ten sam rozkład jednostajny na przedziale $(0, 2)$.
16. Wektor losowy (X, Y, Z) ma rozkład o gęstości

$$f(x, y, z) = \frac{1}{12} xy^2 z^3 \exp[-(x + y + z)] \quad (x > 0, y > 0, z > 0)$$

Obliczyć $E(Z|X = z, Y = y)$.