procesy stochastyczne
I rok matematyki II-go stopnia
lista 7

Uwaga: O ile nie jest powiedziane inaczej rozważamy standardowy proces Wienera.

1. Niech $X \sim N(0, \sigma)$. Pokazać, że

   a) $E(X^{2k+1}) = 0$ dla dowolnego $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

   b) $E(X^{2k}) = \sigma^2(2k-1)E(X^{2k-2})$ dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$,

   c) $E(X^{2k}) = (2k-1)!!\sigma^{2k}$ dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$.

2. Udowodnij, że dla dowolnej liczby $p \geq 1$ proces Wienera jest procesem rzędu p.

3. Wyznaczyć funkcję kowariancji procesu Wienera.

4. Podać przykład procesu o funkcji kowariancji $K(t,s) = \min(t,s)$ nie będącego stochastyczną modyfikacją procesu Wienera.

5. Udowodnij, że dla dowolnych liczb nieujemnych t i s takich, że $s \leq t$ rozkłady zmiennych losowych $W_t - W_s$ i W_{t-s} są identyczne.

6. Udowodnij, że dla dowolnej liczby dodatniej c i dowolnej liczby nieujemnej t rozkłady zmiennych W_{ct} oraz $\sqrt{c}W_t$ są identyczne.

7. Udowodnij, że

   a) proces Wienera $(W_t)_{t\geq 0}$ jest $(\mathcal{F}_t^W)$-martyngałem,

   b) proces Wienera $(W_t)_{t\geq 0}$ względem filtracji $(\mathcal{F})t \geq 0$ jest $(\mathcal{F}_t)$-martyngałem.

8. Dany jest proces Wienera $(W_t)_{t\geq 0}$. Udowodnij, że

   a) $(W_t^2)_{t\geq 0}$ jest $(\mathcal{F}_t^W)$-podmartyngałem,

   b) $(W_t^2 - t)_{t\geq 0}$ jest $(\mathcal{F}_t^W)$-martyngałem.

9. (symetria). Niech
$$\forall_{t\geq 0} \;\; G_t := -W_t.$$
   Udowodnić, że proces $(G_t)_{t\geq 0}$ jest procesem Wienera.

10. (skalowanie). Niech c będzie ustaloną liczbą dodatnią i niech ponadto
$$\forall_{t\geq 0} \;\; Z_t := \frac{1}{c}W_{c^2t}.$$
    Udowodnić, że proces $(Z_t)_{t\geq 0}$ jest procesem Wienera.