

**ćwiczenia z rachunku prawdopodobieństwa
ii rok informatyki i ekonometrii
lista 7**

1. Z kwadratu o boku a losowany jest punkt. Wartością zmiennej losowej X jest odległość od najbliższego boku. Wyznaczyć rozkład X .
2. Dane są dwa koła współśrodkowe o promieniach 1 i 2. Z większego koła losujemy punkt. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe odległości punktu od mniejszego z okręgów. Podać rozkład zmiennej losowej.
3. Z odcinka $[0, 1]$ losujemy dwie liczby. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej X przyjmującej wartości równe
 - a) minimum z wylosowanych liczb;
 - b) maksimum z wylosowanych liczb;
 - c) sumie wylosowanych liczb.
4. Z kwadratu $[0, 1]^2$ losujemy punkt (x, y) . Zmienna losowa X przyjmuje wartości równe sumie współrzędnych wylosowanego punktu. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej X .
5. Czy można dobrać stałe a, b tak aby funkcja $F(x) = a \arctan x + b$ była dystrybuantą pewnego rozkładu? Jeśli tak, to je podać wraz z uzasadnieniem.
6. Wyznaczyć zbiór wszystkich trójek a, b i c , dla których funkcja

$$F(t) = \begin{cases} at^2, & t < 0, \\ bt + c, & 0 \leq t < 2, \\ 1, & t \geq 2 \end{cases}$$

jest

- a) dystrybuantą zmiennej losowej,
 - b) dystrybuantą zmiennej losowej o rozkładzie dyskretnym,
 - c) dystrybuantą zmiennej losowej o rozkładzie ciągłym.
7. Wyznaczyć dystrybuanty dla rozkładów opisanych w zadaniach z poprzedniej listy.
 8. Funkcja

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ \frac{1}{4}, & -1 \leq x < 1, \\ \frac{1}{2}, & 1 \leq x < 2 \\ \frac{7}{8}, & 2 \leq x < 4 \\ 1 & x \geq 4. \end{cases}$$

jest dystrybuantą zmiennej losowej X . Wtedy (odpowiedzieć *tak* lub *nie*):

- a) $P(X \leq 2) > P(X > 2)$;
 - b) $W_X = \{-1, 1, 2, 3\}$;
 - c) $P(X = 3) = \frac{7}{8}$;
 - d) $P(X^2 - 1 = 0) = \frac{1}{2}$.
9. Dystrybuanta zmiennej losowej X dana jest wzorem

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ 0, 1 + t & \text{dla } 0 \leq t < 0, 5 \\ 0, 4 + t & \text{dla } 0, 5 \leq t < 0, 55 \\ 1 & \text{dla } t \geq 0, 55 \end{cases}$$

Wyznaczyć $P(X = \frac{1}{2}), P(X \in [0, \frac{1}{2}]), P(X < 0, 55)$.

10. Czy można dobrać parametr a tak, aby podane funkcje były gęstościami pewnego rozkładu zmiennej losowej? Odpowiedź uzasadnij. W przypadku odpowiedzi pozytywnej policzyć ich dystrybuanty.

- a) $f(x) = \begin{cases} ax & \text{dla } x \in \langle 0, 4 \rangle ; \\ 0 & \text{dla } x \notin \langle 0, 4 \rangle ; \end{cases}$
- b) $f(x) = \begin{cases} ax & \text{dla } x \in \langle -1, 4 \rangle ; \\ 0 & \text{dla } x \notin \langle -1, 4 \rangle ; \end{cases}$
- c) $f(x) = \begin{cases} ax^2 & \text{dla } x \in \langle 0, 3 \rangle ; \\ 0 & \text{dla } x \notin \langle 0, 3 \rangle ; \end{cases}$
- d) $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}x \cdot (2 - x) & \text{dla } x \in \langle 0, a \rangle ; \\ 0 & \text{dla } x \notin \langle 0, a \rangle ; \end{cases}$

11. Funkcje $f_i, i = 1, 2, 3$ są gęstościami rozkładów jednostajnych na odcinkach $(i - 1, i)$. Wtedy są gęstościami także funkcje (odpowiedzieć *tak* lub *nie*):

- a) $f_1 + f_2 + f_3$,
- b) $f_2 \cdot f_3$,
- c) $|f_3 - f_1|$,
- d) $\frac{1}{2}f_1 + \frac{1}{2}f_2$,
- e) $\max(f_1, f_2)$.

12. Zmienna losowa ma rozkład $N(0,1)$. Oblicz prawdopodobieństwo

- $P(\{X > 0\})$
- $P(\{X > 2\})$
- $P(\{|X| < 1\})$
- $P(\{|X| > 1\})$
- $P(\{0 < X < 3\})$
- $P(\{-1 < X < 3\})$

13. Zmienna losowa ma rozkład $N(1,2)$. Oblicz prawdopodobieństwo

- $P(\{|X| > 3\})$
- $P(\{X^2 \leq \frac{3}{4} + X\})$