ćwiczenia z rachunku prawdopodobieństwa
matematyka, III rok
lista 7 (zmienne losowe)

1. Przeznaczona do odbioru partia towaru zawiera jadnakową liczbę sztuk I, II i III gatunku. Niech $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ oznaczają zdarzenia elementarne w doświadczeniu polegającym na wylosowaniu z tej partii towaru sztuki odpowiednio I, II, III gatunku. Zmienne losowe X, Y określamy w sposób następujący:

$$X(\omega_1) = 2,\ X(\omega_2) = 1,\ X(\omega_3) = 0$$

$$Y(\omega_1) = 0,\ Y(\omega_2) = 1,\ Y(\omega_3) = 2$$

   Porównać rozkłady zmiennych losowych X, Y. Wyznaczyć ich dystrybuanty. Czy zmienne losowe X i Y są równe?

2. Z kwadratu o boku a losowany jest punkt. Wartością zmiennej losowej X jest odległość od najbliższego boku. Wyznaczyć rozkład X.

3. Dane są dwa koła współśrodkowe o promieniach 1 i 2. Z większego koła losujemy punkt. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe odległości punktu od mniejszego z okręgów Podać rozkład zmiennej losowej.

4. Z okręgu o promieniu 1 losujemy dwa punkty P, Q. Wartością zmiennej losowej jest długość mniejszego łuku. Wyznaczyć rozkład X.

5. Z odcinka $[0, 1]$ losujemy dwie liczby. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej X przyjmującej wartości równe
   a) minimum z wylosowanych liczb;
   b) maksimum z wylosowanych liczb;
   c) sumie wylosowanych liczb.

6. Z sześcianu o krawędzi a wylosowano trzy wierzchołki. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe polu trójkąta utworzonego z tych wierzchołków. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej.

7. Dany jest odcinek $\langle 0, L\rangle$ i punkt r należący do tego odcinka. Z odcinka losujemy dwa punkty x_1, x_2. Zmienna losowa X przyjmuje wartość 1, gdy punkt r znajduje się miedzy wylosowanymi punktami oraz 0 w przeciwnym wypadku. Podać rozkład X.

8. Rzucamy pięcioma symetrycznymi monetami. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe ilości wyrzuconych orłów. Podać rozkład zmiennej losowej.

9. Dane są 4 urny i 3 kule. Rozmieszczamy kule w urnach. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe ilości pustych urn. Obliczyć rozkład zmiennej losowej.

10. Losujemy n - krotnie (ze zwracaniem) liczbę spośród liczb od 1 do N. X największa spośród liczb uzyskanych w losowaniu. Obliczyć rozkład zmiennej losowej.

11. Czy można dobrać stałe a, b tak aby funkcja $F(x) = a \arctan x + b$ była dystrybuantą pewnego rozkładu ? Jeśli tak, to je podać wraz z uzasadnieniem.

12. Wyznaczyć zbiór wszystkich trójek a, b i c, dla których funckja

$$F(t) = \begin{cases} at^2, & t < 0, \\ bt + c, & 0 \le t < 2, \\ 1, & t \ge 2 \end{cases}$$

   jest
   a) dystrybuantą zmiennej losowej,
   b) dystrybuantą zmiennej losowej o rozkładzie dyskretnym,
   c) dystrybuantą zmiennej losowej o rozkładzie ciągłym.

13. Ze zbioru $\{1, \ldots, n\}$ losujemy bez zwracania dwie liczby. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej X przyjmującej wartości równe
   a) minimum z wylosowanych liczb;

b) maksimum z wylosowanych liczb;

c) sumie wylosowanych liczb.

14. Funkcja

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ \frac{1}{4}, & -1 \le x < 1, \\ \frac{1}{2}, & 1 \le x < 2 \\ \frac{7}{8} & 2 \le x < 4 \\ 1 & x \ge 4. \end{cases}$$

jest dystrybuantą zmiennej losowej X. Wtedy (odpowiedzieć *tak* lub *nie*):

a) $P(X \le 2) > P(X > 2)$;

b) $W_X = \{-1, 1, 2, 3\}$;

c) $P(X = 3) = \frac{7}{8}$;

d) $P(X^2 - 1 = 0) = \frac{1}{2}$.

zadania do samodzielnego rozwiązania:

1. Rzucamy dwoma kostkami i symetryczną monetą, na której znajdują się liczby -1,1. Zmienna losowa X przyjmuje wartości równe sumie liczby wypadłej na monecie i wartości bezwzględnej różnicy wyrzuconych oczek. Podać rozkład zmiennej losowej.

2. Niech $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$, $P(\{\omega\}) = \frac{1}{4}$ dla $\omega = 0, 1, 2, 3$. Definiujemy dwie zmienne losowe $X(\omega) = \sin\frac{\pi\omega}{2}$ oraz $Y(\omega) = \cos\frac{\pi\omega}{2}$. Znaleźć rozkłady i dystrybuanty zmiennych losowych X i Y. Obliczyć $P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = Y(\omega)\})$.

3. Z talii 52 kart wyciągamy 6 i takiemu losowaniu przypisujemy liczbę pików. Znaleźć rozkład określonej w ten sposób zmiennej losowej.

4. Z pęku n kluczy wybierany jest jeden i pasowany do zamka. Klucz, który nie pasuje jest odkładany, a z pozostałych jest losowany kolejny klucz. Wartością zmiennej losowej X jest numer tej próby, w której klucz pasuje do zamka. Wiadomo, że tylko jeden klucz otwiera zamek. Wyznaczyć rozkład X.