ćwiczenia z rachunku prawdopodobieństwa
matematyka, III rok
lista 8 (zmienne losowe - cd.)

1. Dana jest gęstość określona wzorem
$$f(x) = \begin{cases} \cos x & x \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \\ 0 & x \notin \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \end{cases}.$$
Nie licząc całki podać ile wynosi prawdopodobieństwo w punkcie $\frac{\pi}{4}$. Odpowiedź uzasadnij.

2. Dana jest funkcja
$$f(x) = \begin{cases} a(l^2 - x^2)^{-0,5} & |x| < l \\ 0 & \text{w p.p} \end{cases}.$$
Określić parametr a, tak aby funkcja była gęstością, obliczyć dystrybuantę i $P(\{0 \leq X < 1\})$.

3. Czy można dobrać parametr a tak, aby podane funkcje były gęstościami pewnego rozkładu zmiennej losowej? Odpowiedź uzasadnij. W przypadku odpowiedzi pozytywnej policzyć ich dystrybuanty.
   - $f(x) = \begin{cases} ax & \text{dla } x \in \langle 0, 4 \rangle \\ 0 & \text{dla } x \notin \langle 0, 4 \rangle \end{cases}$;
   - $f(x) = \begin{cases} ax & \text{dla } x \in \langle -1, 4 \rangle \\ 0 & \text{dla } x \notin \langle -1, 4 \rangle \end{cases}$;
   - $f(x) = \begin{cases} ax^2 & \text{dla } x \in \langle 0, 3 \rangle \\ 0 & \text{dla } x \notin \langle 0, 3 \rangle \end{cases}$;
   - $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}x(2-x) & \text{dla } x \in \langle 0, a \rangle \\ 0 & \text{dla } x \notin \langle 0, a \rangle \end{cases}$;

4. Funkcje $f_i, i = 1, 2, 3$ są gęstościami rozkładów jednostajnych na odcinkach $(i-1, i)$. Wtedy są gęstościami także funkcje (odpowiedzieć *tak* lub *nie*):
   a) $f_1 + f_2 + f_3$,
   b) $f_2 \cdot f_3$,
   c) $|f_3 - f_1|$,
   d) $\frac{1}{2}f_1 + \frac{1}{2}f_2$,
   e) $\max(f_1, f_2)$.

5. Zmienna losowa ma rozkład N(0,1). Oblicz prawdopodobieństwo
   - $P(\{X > 0\})$
   - $P(\{X > 2\})$
   - $P(\{|X| < 1\})$
   - $P(\{|X| > 1\})$
   - $P(\{0 < X < 3\})$
   - $P(\{-1 < X < 3\})$

6. Zmienna losowa ma rozkład N(1,2). Oblicz prawdopodobieństwo
   - $P(\{|X| > 3\})$
   - $P(\{X^2 \leq \frac{3}{4} + X\})$

zadania do samodzielnego rozwiązania:

1. Znaleźć σ-ciało generowane przez zmienną losową X, gdy:
   a) rzucamy symetryczną kostką, X przyjmuje wartość 1, gdy wypadła parzysta liczba oczek, 2 jeśli nieparzysta;
   b) losujemy punkt z koła $K(a, 1)$, $X(\omega) = |\omega - a|$.

2. Rzucamy kostką, zmienna losowa X przyjmuje wartość 0 jeśli liczba wyrzuconych oczek jest podzielna przez 3, 1 gdy liczba wyrzuconych oczek przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1, 2 gdy liczba wyrzuconych oczek przy dzieleniu przez 3 daje resztę 2. Czy zmienna losowa X jest mierzalna względem σ-ciała $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, \{2, 4\}, \{1, 3, 5, 6\}\}$?