

ćwiczenia z rachunku prawdopodobieństwa  
matematyka finansowa, II rok  
lista 9

1. Obliczyć wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej losowej  $X$  o rozkładzie:
  - a) dwupunktowym na zbiorze  $\{a, b\}$ ;
  - b) równomiernym na zbiorze  $\{1, 2, \dots, 6\}$ ;
  - c) Bernoulliego (dwumianowym) z parametrami  $n, p$ ;
  - d) Poissona z parametrem  $\lambda$ ;
  - e) geometrycznym z parametrem  $p$
2. Obliczyć wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej losowej  $X$  o rozkładzie:
  - a) jednostajny na odcinku  $[a, b]$ ;
  - b) wykładniczy z parametrem  $\lambda$ ;
  - c) normalny z parametrami:  $m, \sigma$ ;
  - d) Cauchy'ego;
  - e) gamma z parametrami  $a, b$ .
3. Udowodnić podane n wykładzie własności wariancji.
4. Udowodnić  $E(X) = 0 \Rightarrow E(|X|) \leq \frac{1}{2}(1 + D^2(X))$ .
5. Obliczyć  $k$  - ty moment zmiennej losowej o rozkładzie wykładniczym.
6. Obliczyć  $k$  - ty moment zmiennej losowej o rozkładzie normalnym z parametrami  $m = 0, \sigma$ .
7. Niech  $X$  będzie zmienną nieujemną. Udowodnić, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(\{X \geq n\}) \leq E(X) \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P(\{X \geq n\}).$$

8. Podać przykład zmiennej losowej  $X$  takiej, że  $E(|X|) > E(|X|^2)$ .
9. Niech  $Z$  ma rozkład wykładniczy z parametrem  $\lambda$ . Znaleźć wartość oczekiwaną sumy oraz iloczynu pierwiastków równania  $x^2 + (3Z^2 + 4)x - 3Z = 0$ .
10. Znajdź kwantyl rzędu  $p = \frac{1}{3}$ , gdy  $X$  jest zmienną losową o rozkładzie:
  - a) wykładniczym z parametrem  $\lambda = 2$ ;
  - b) jednostajnym na odcinku  $[0, 3]$ ;
  - c) równomiernym na zbiorze  $\{1, 2, \dots, 6\}$ ;
  - d) normalnym z parametrami  $m = 1, \sigma = 3$ .
11. Znajdź medianę, gdy  $X$  jest zmienną losową o rozkładzie:
  - a) wykładniczym z parametrem  $\lambda = 2$ ;
  - b) jednostajnym na odcinku  $[0, 3]$ ;
  - c) równomiernym na zbiorze  $\{1, 2, \dots, 6\}$ .
12. Wyznacz odchylenie ćwiartkowe, gdy  $X$  jest zmienną losową o rozkładzie:
  - a) wykładniczym z parametrem  $\lambda = 2$ ;
  - b) jednostajnym na odcinku  $[0, 3]$ ;
  - c) równomiernym na zbiorze  $\{1, 2, \dots, 6\}$ ;
  - d) normalnym z parametrami  $m = 1, \sigma = 3$ .