

ćwiczenia z rachunku prawdopodobieństwa
matematyka, III rok
lista 9 (funkcje zmiennych losowych)

- Niech zmienna losowa X posiad rozkład równomierny na odcinku (a, b) . Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej $Y = AX + B, A, B \in R, A \neq 0$.
- X jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na odcinku $[0,1]$. Znaleźć dystrybuantę i gęstość następujących zmiennych losowych
 - $Y = aX + b$ gdzie $a, b \in R \wedge a \neq 0$;
 - $Y = 2X^2 - 1$;
 - $Y = -\ln(1 - X)$;
 - $Y = -\ln X$;
 - $Y = X^k, k \in N$;
- X ma rozkład wykładniczy ze współczynnikiem $\lambda > 0$. Znaleźć gęstość rozkładu:
 - $Y = X^\alpha, \alpha > 0$
 - $Y = X^3$;
 - $Y = 5X - 1$;
 - $Y = 3X + 2$;
- X ma rozkład normalny $N(0, 1)$. Jaki rozkład ma zmienna $Y = aX + b$ gdzie $a, b \in R, a > 0$?
- Zmienna losowa X ma gęstość $f(x)$. Wyznaczyć gęstość zmiennej losowej $Y = \phi(X)$ przy założeniu, że ϕ jest wzajemnie jednoznaczne i różniczkowalne.
- Dystrybuanta F zmiennej losowej X jest funkcją ciągłą dla dowolnej liczby rzeczywistej. Czy stąd wynika, że jej gęstość f jest również funkcją ciągłą? W przypadku i odpowiedzi pozytywnej przeprowadzić dowód, zaś w przypadku negatywnej podać kontrprzykład.
- Niech F będzie dystrybuantą ciągłej zmiennej losowej X . Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej $Y = F(X)$, przy założeniu, że istnieje funkcja odwrotna do $y = F(x)$.
- Dana jest zmienna losowa $X \in N(0, 1)$. Określamy zmienną losową $Y = X^2$. Wyznaczyć gęstość zmiennej losowej Y .
- Zmienna losowa ma rozkład równomierny na odcinku $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej $Y = \cos X$.
- X jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na odcinku $[0,1]$. Znaleźć dystrybuantę i gęstość następujących zmiennych losowych $Y = \max\{X, 1 - X\}, Y = \min\{X, 1 - X\}$.
- Zmienna losowa Y określona jest wzorem $Y = \begin{cases} \sqrt{X} & \text{dla } X \geq 0 \\ \sqrt{-X} & \text{dla } X < 0 \end{cases}$. Wyznaczyć gęstość zmiennej losowej Y jeśli $X \in N(0, 1)$.
- Mówimy, że zmienna losowa X ma rozkład symetryczny, jeśli zmienna $-X$ posiada ten sam rozkład. Wyrazić własność symetryczności ciągłej zmiennej losowej za pomocą jej dystrybuanty oraz gęstości.

zadania do samodzielnego rozwiązania:

- Niech zmienna losowa Y ma rozkład $N(m, \sigma)$. Zmienna losowa X ma rozkład logarytmiczno normalny jeśli $Y = \ln X$. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej X .
- Niech X ma funkcję gęstości

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)\mathbf{1}_{(-1,1)}(x),$$

gęstość zmiennej losowej $Y = X^2$ dana jest dla $y \in (0, 1)$ wzorem:

A) $\frac{1}{2\sqrt{y}}$, B) $2y$, C) $\frac{3}{2} - y$, D) $\frac{4}{3} - y^2$, E) $\frac{1}{(y+1)\ln 2}$.

- X ma rozkład wykładniczy ze współczynnikiem $\lambda > 0$. Znaleźć gęstość rozkładu:
 - $Y = \{X\}$, gdzie $\{X\} = X - [X]$ oznacza część ułamkową;
 - $Y(\omega) = k^2$, gdy $k \leq X(\omega) < k + 1, k = 0, 1, 2, \dots$;