

**ANALIZA MATEMATYCZNA II**  
**Studia podyplomowe matematyki, semestr II**  
**Lista 4**  
*całka oznaczona*

1. Obliczyć całki

$$I_1 = \int \sqrt{a^2 - x^2} dx \quad \text{i} \quad I_2 = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

2. Obliczyć podane całki oznaczone:

1) $\int_{-1}^3 (x^3 - x + 1) dx$ ;	2) $\int_0^1 (x + \sqrt[3]{x^2}) dx$ ;	3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$ ;
4) $\int_0^2 \frac{3x-1}{3x+1} dx$ ;	5) $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$ ;	6) $\int_{-1}^0 x e^{-x} dx$ ;
7) $\int_{-4}^2  x ^3 dx$ ;	8) $\int_0^{\pi} \sin^2 x \cos x dx$ ;	9) $\int_0^1 x \sqrt{1+x} dx$ ;
10) $\int_0^{\pi} \sin x e^{\cos x} dx$ ;	11) $\int_{-\pi}^0 x(1 + \cos x) dx$ ;	12) $\int_{\frac{1}{e}}^2 (x-1) \operatorname{sgn}(\ln x) dx$ ;
13) $\int_{-2}^2   x  - 1  dx$ ;	14) $\int_0^4 \frac{ x-1 }{ x-2 + x+3 } dx$ ;	15) $\int_{-2}^2 \operatorname{sgn}(x-x^2) dx$ ;
16) $\int_0^2 \sqrt{x^4 - 4x^2 + 4} dx$ ;	17) $\int_1^3 x E(x) dx$ ;	18) $\int_2^{\pi} e^{E(x)} dx$ ;

3. Wykorzystując własności całek z funkcji parzystych, nieparzystych lub okresowych uzasadnić podane równości:

a)  $\int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx = 0$ ;

b)  $\int_{-1}^1 \frac{2x^5 - x^3 + x}{x^2 + 1} dx = 0$ ;

c)  $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x \tan x^3 dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \tan x^3 dx$ ;

d)  $\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin^4 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx$  ;

4. Obliczyć pole obszaru D ograniczonego:

- a) wykresami funkcji  $y = x^2$ ,  $y = 2x + 3$ ,
- b) wykresami funkcji  $y = \sin x$ ,  $y = \cos 2x$  oraz osią Oy ( $x \geq 0$ ),
- c) parabolami  $y = x^2$ ,  $y = 2x^2$  oraz prostą  $y = 4$ ,
- d) krzywymi  $4y = x^2$ ,  $y = \frac{8}{x^2 + 4}$ ,
- e) krzywymi  $y = \frac{1}{x^2}$ ,  $y = x$ ,  $y = 4$ ,
- f) elipsą  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ,