matematyka finansowa i ubezpieczeniowa - ćwiczenia
iii rok informatyki i ekonometrii
lista 6

Renty cd.

1. Simplify $a_{\overline{15|}}(1 + v^{15} + v^{30})$ to one symbol.
2. A fund of 2000$ is to accumulated by n annual payments of 50$, followed by n annual payments of 100$, plus a smaller final payment made one year after the last regular payment. If effective rate of interest is 4,5%, find n and the amount of the final irregular payment.
3. A borrower has the following two options for repaying a loan:
   - sixty monthly payments of 100$ at the end of each month,
   - a single payment of 6000$ at the end of K months.

   Interest is at the nominal annual rate of 12% convertible monthly. The two options have the same present value. Find K.
4. Obliczyć wartość początkową renty nieskończonej z dołu, w której pierwsza płatność wynosi 150, a każda następna jest o 20 większa od poprzedniej. Przyjąć stopę procentową w wysokości 3%.
5. Nominalne oprocentowanie rachunku wynosi 6% przy kapitalizacji kwartalnej. Jaka kwota zgromadzona zostanie na rachunku na koniec piątego roku w wyniku wpłacania 500 zł:
   a) na koniec każdego kwartału,
   b) na początku każdego kwartału,
   c) na koniec każdego półrocza,
   d) na początku każdego półrocza,
   e) na koniec każdego miesiąca,
   f) na początku każdego miesiąca?

   W przypadkach e) i f) rozpatrzyć naliczanie odsetek w podokresach zgodnie z zasadą oprocentowania 1) składanego, 2) prostego.

matematyka aktuarialna

6. Jeśli $s(x) = (1 - \frac{x}{100})^{\frac{1}{2}}$ gdzie $0 \le x \le 100$
   oblicz:
   a) ${}_{39}p_{36}$
   b) ${}_{17}q_{19}$
   c) ${}_{10|5}q_{50}$
7. Uzasadnić, że następujący wzór jest prawdziwy
$$ {}_{t_1+t_2+\ldots+t_n}p_x = {}_{t_1}p_x \cdot {}_{t_2}p_{x+t_1} \cdot {}_{t_3}p_{x+t_1+t_2} \cdot \ldots \cdot {}_{t_n}p_{x+t_1+t_2+\ldots+t_{n-1}} $$
8. Przedstawić ${}_3q_x$ za pomocą symboli aktuarialnych dotyczących rocznych okresów.
9. Pokazać, że:
$$ \overset{\circ}{e}_x = E(T(x)) = \int_0^\infty {}_tp_x\,dt $$
10. Mając dane ${}_tp_x = 1 - (\frac{t}{100})^{1,5}$ dla $x = 60$ oraz $0 < t < 100$ oblicz
    a) $E(T(x))$
    b) $P(K(x) = 20)$

11. Niech X będzie zmienna losową o dystrybuancie danej wzorem

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad \text{dla} \quad x > 0$$

   a) jaki rozkład ma zmienna losowa X?;
   b) pokazać, że dystrybuanta zmiennej losowej $T(x)$ jest funkcją zależną jedynie od t (a nie od x) czyli, że posiada własność braku pamięci;

   oblicz:

   c) $E(T(x))$
   d) $Var(T(x))$

12. Niech X ma rozkład $U[0,\omega]$ oblicz

   a) ${}_{15}p_{35}$
   b) q_{50}
   c) ${}_{10|5}q_{50}$
   d) $s(50)$
   e) pokazać, że $T(x)$ ma rozkład $U[0,\omega - x]$;
   f) obliczyć $Var(T(x))$;
   g) wyznaczyć rozkład zmiennej losowej $K(x)$.

13. Obliczyć $e_x = E(K(x))$, gdy $T(0)$ ma rozkład wykładniczy z parametrem μ.

14. Pokazać, że $\lim\limits_{t \to 0} \frac{{}_tq_x}{t} = \mu(x)$.

15. Jeśli $s(x) = (1 - \frac{x}{100})^{\frac{1}{2}}$ gdzie $0 \le x \le 100$
   oblicz:

   a) $\mu(36)$;
   b) $E(T(36))$.

16. Znając ${}_tp_x = \frac{100-x-t}{100-x}$ dla $0 \le x \le 100$ oraz $0 \le t \le 100 - x$ obliczyć μ_{45}.

17. Niech $\mu(x) = 0,001$ dla $20 \le x \le 25$ obliczyć ${}_{2|2}q_{20}$.

18. Wiedząc, że natężenie wymierania pewnej populacji dane jest wzorem

$$\mu_x = \frac{3}{100 - x} \qquad 0 \le x \le 100$$

   oblicz:

   a) ${}_{10}p_{50}$
   b) ${}_{12}q_{50}$
   c) ${}_{10|5}q_{50}$
   d) $s(50)$

19. Wiedząc, że natężenie wymierania pewnej populacji określone jest funkcją

$$\mu_x = \begin{cases} \frac{3}{110-x} & \text{dla } 0 \le x < 50 \\ \frac{2,5}{100-x} & \text{dla } 50 \le x < 100 \end{cases}$$

   a) wyznaczyć ${}_tp_x$, $\quad 0 \le t \le 100 - x, \quad 0 \le x \le 100$
   b) obliczyć $\mathring{e}_{30}$

20. Zakładając, że natężenie śmiertelności jest stałe dla $x \ge 50$ oraz $\mathring{e}_{50} = 40$, obliczyć p_{60}.