

**proseminarium z matematyki elementarnej**  
**lista 5 (funkcje trygonometryczne - część I)**

1. Obliczyć wartość wyrażenia:

$$\text{a) } \frac{4a^2 \sin 45^\circ - 6ab \tan^2 30^\circ + (b \tan 45^\circ)^2}{2a \sin 30^\circ - 2b \cos^2 45^\circ}, \quad \text{b) } \frac{(x \sin 90^\circ)^3 - x^2 y^2 \tan 0^\circ + xy^2 \cot 90^\circ + (y \cos 180^\circ)^3}{(x \cos 180^\circ)^2 + xy \sin 270^\circ \cos 180^\circ + (y \sin 270^\circ)^2}$$

2. Znaleźć wartość wyrażenia:  $W = \frac{2\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha - 3\sin\alpha}$ , jeśli  $\tan\alpha = -2$  oraz  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ .

3. Narysować wykresy funkcji:

- a)  $y = 2 \sin x$ ,
- b)  $y = |\cos(x + \frac{\pi}{4})|$ ,
- c)  $y = \frac{2|\sin x|}{\sin x}$ ,
- d)  $y = 2|\cos x| + \cos x$ ,
- e)  $y = \cos \frac{|x|-x}{2} - \frac{2|x|}{x}$ ,
- f)  $y = \frac{1}{2}(\frac{|\sin x|}{\cos x} + \frac{\sin x}{|\cos x|})$ ,
- g)  $y = \max(|\tan x|, \cos 2x, -2\sin x)$ ,
- h)  $y = x^{2+\sqrt{|\sin x|-1}}$ ,
- i)  $y = \min(\sin(\frac{1}{2}x), \cos(2x - \frac{\pi}{3}), -\cot(x + \frac{\pi}{4}))$

4. Sprawdź następujące tożsamości:

- $1 + \cot x = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x}$ ,
- $(1 + \sin x)(\frac{1}{\cos x} - \tan x) = \cos x$ ,
- $\frac{\sin x}{1 + \cos x} + \frac{1 + \cos x}{\sin x} = \frac{2}{\sin x}$ ,
- $1 - 2\sin^2 x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$ ,
- $\frac{\tan x + \cot x}{\cot x + \tan x} = \tan x \cdot \cot x$

5. Doprowadź do prostszej postaci wyrażenie:  $\frac{\tan(\pi - \alpha)\cot^2(\alpha - \pi) - \tan^3(\alpha - 2\pi)\tan^2(\frac{3}{2}\pi - \alpha)}{\tan(\alpha - \frac{\pi}{2})[\sin^2(\alpha - \frac{3}{2}\pi) + \sin^2(\frac{3}{2}\pi + \alpha)]}$ .

6. Oblicz bez użycia tablic matematycznych:

- a)  $\sin 1200^\circ + \cos(-1080^\circ)$ ,
- b)  $3\cos(-300^\circ)\sin 120^\circ \tan 135^\circ$ ,
- c)  $10\cot 315^\circ \sin(-150^\circ) \cos 225^\circ$ ,

7. Oblicz bez użycia tablic matematycznych:  $\sin 75^\circ, \cos 15^\circ, \tan 105^\circ$ .

8. Mając dane  $\sin 12^\circ = a$  oblicz  $\cos 33^\circ$ .

9. Mając dane  $\sin \alpha = 0,6$   $\sin \beta = 0,8$  oraz  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$  oblicz  $\sin \gamma$ .

10. Narysować wykres funkcji:

- a)  $y = 4|\sin x|\cos x$ ,
- b)  $y = |\sin^4 x - \cos^4 x|$ .

11. Sprawdź następujące tożsamości:

- a)  $\frac{\cos 2x}{1 + \sin 2x} = \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}$ ,
- b)  $\tan(\frac{\pi}{6} + \alpha) \cdot \tan(\frac{\pi}{6}) = \frac{2\cos 2\alpha - 1}{2\cos^2 2\alpha + 1}$ ,

$$c) \frac{1+2tg\alpha-tg^2\alpha}{cos2\alpha+sin2\alpha} = \frac{1}{cos^2\alpha},$$

$$d) \frac{sin2\alpha}{1+cos2\alpha} \cdot \frac{cos\alpha}{1+cos\alpha} = tg\frac{\alpha}{2}$$

12. Oblicz  $cos6x$  wiedząc, że  $tg(\frac{\pi}{4} + 3x) = tg6x + 2$ .

13. Rozwiąż równania:

$$a) sin5x = \frac{1}{2},$$

$$b) cos(2x - \frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$c) cos2x + cosx + 1 = 0,$$

$$d) tg^3x - 2tg^2x - tgx + 2 = 0,$$

$$e) 2cos^2x + 3sinx = 3,$$

$$f) 3sin^22x + 2cos^2x - 2 = 0,$$

$$g) (\frac{2}{3})^{4sin^2x} + (\frac{2}{3})^{4cos^2x} = \frac{26}{27},$$

$$h) \frac{sinx}{1-cosx} = 0,$$

$$i) cos4x + 2cos^2x = 1,$$

$$j) sin10x - sin6x = 2sin2x,$$

$$k) cos4x + cos2x = 2cosx,$$

$$l) tgx + tg^3x + tg^5x + \dots = \frac{\sqrt{3}}{2}$$