rachunek prawdopodobieństwa
matematyka zawodowa III rok
lista 10

1. Kupiono 500 ton węgla z pewnej kopalni, której węgiel zawiera przeciętnie 4% miału. Z jakim prawdopodobieństwem możemy sądzić, że kupiony węgiel zawiera co najwyżej 30 ton miału ? Obliczenia przeprowadzić korzystając z nierówności Czebyszewa.

2. Dowieść następującego twierdzenia: *Dla dowolnej zmiennej losowej X i dla $t > 0$ zachodzi* $P(\{\omega : tX(\omega) > t^2 + \ln E(e^{aX}\}) < e^{t^2}$.

3. Niech $f : R \to R$ będzie funkcją nieujemną, parzystą i niemalejącą dla $x > 0$. Dowieść że dla dowolnej zmiennej losowej X i dowolnie wybranej stałej $c > 0$ spełniona jest nierówność
   - jeżeli $|f| \leq K < \infty$, to $P(\{\omega : |X(\omega)| \geq c\}) \geq \frac{E(f(X))-f(c)}{K}$.
   - jeżeli $|X| \leq M < \infty$, to $P(\{\omega : |X(\omega)| \geq c\}) \geq \frac{E(f(X))-f(c)}{f(M)}$ (nierówność Kołmogorowa).

4. Udowodnić, że jeśli $\{X_n : n \in N\}$ jest ciągiem zmiennych losowych, dla którego spełniony jest warunek: istnieje skończona wariancja $D^2(X_n)$ dla $n \in N$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} D^2(X_n) = 0$ (zwanym warunkiem Markowa), to ciąg $\{X_n - E(X_n) : n \in N\}$ jest zbieżny według prawdopodobieństwa (stochastycznie) do zera.

5. Pokazać, że granica według prawdopodobieństwa jest wyznaczona jednoznacznie.

6. Udowodnić, że jeżeli ciąg zmiennych losowych $\sqrt{X_n}$ jest zbieżny w L^2, to ciąg X_n jest zbieżny w L^1.

7. Jeśli $X_n \xrightarrow{p.n} X$, to $X_n \xrightarrow{P} X$.

8. Dany jest ciąg zmiennych losowych przyjmujących wartości $a > 0$ na odcinku $< 0, \frac{1}{2^n} >$, 0 na odcinku $(\frac{1}{2^n}, 1 >$ z prawdopodobieństwami równymi długości odcinków. Wykazać, że tak określony ciąg X_n zmiennych losowych jest zbieżny według prawdopodobieństwa.

9. Niech $\{X_n : n \in N\}$ będzie ciągiem zmiennych losowych dla których z prawdopodobieństwem 1 mamy $|X_n| \leq c < \infty$. Dowieść, że $X_n \to 0$ według prawdopodobieństwa wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim\limits_{n\to\infty} E(|X_n|) = 0$.

10. Niech $\{X_n : n \in N\}$ będzie ciągiem zmiennych losowych takich, że $P(\{\omega : X_n(\omega) = \pm\frac{1}{n}\}) = \frac{1}{2}$. Wykazać, że ciąg ten jest zbieżny z prawdopodobieństwem 1 i według prawdopodobieństwa.

11. Niech $\{X_n : n \in N\}$ będzie ciągiem zmiennych losowych takich, że $P(\{\omega : X_n(\omega) = -n-4\}) = \frac{1}{n+4}, P(\{\omega : X_n(\omega) = n+4\} = \frac{3}{n+4}$ i $P(\{\omega : X_n(\omega) = -1\}) = 1 - \frac{4}{n+4}$. Wykazać, że
    - Wykazać, że X_n jest zbieżny według prawdopodobieństwa.
    - $E(\lim_{n\to\infty X_n}) \neq \lim_{n\to\infty} E(X_n)$.