rachunek prawdopodobieństwa
matematyka zawodowa III rok
lista 9

1. Udowodnić nierówność **Schwarza**, gdy $E(X^2) = 0$.
2. Z nierówności **Schwarza** w wywnioskować, że jeśli $E(X)$ istnieje i jest różna od zera wtedy $\frac{1}{E(X)} \leq E(\frac{1}{X})$.
3. Udowodnić nieróność **Minkowskiego**: jeśli $p \geq 1$, to
$$(E(|X+Y|^p))^{\frac{1}{p}} \leq (E(|X|^p))^{\frac{1}{p}} + (E(|Y|^p))^{\frac{1}{p}}$$
4. Niech zmienne losowe $X_1, \ldots, X_n$ są niezależne o jednakowych rozkładach,
$$m := E(X_k), \varrho^2 := D^2(X_k).$$
Stosując klasyczną nierówność Czebyszewa oszacować N dla ustalonego $a > 0$, by
$$P(\{| \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} X_k - m |> a\}) \leq 0.05.$$
5. Z klasycznej nierówności Czebyszewa ocenić prawdopodobieństwo, że zmienna losowa normalna (tzn. $N(0,1)$) odchyli się od swojej wartości oczekiwanej o więcej niż
   - cztery średnie odchylenia,
   - trzy średnie odchylenia.
6. Rzucamy n razy monetą. Niech X ilość orłów. Korzystając z nierówności Czebyszewa znaleźć takie n aby $P(\{|\frac{1}{n}\mathrm{X}-\frac{1}{2}| < 1/10\}) > 9/10$.
7. Strzelamy 300 razy do tarczy z prawdopodobieństwem trafienia w jednym strzale wynoszącym $1/4$. Z nierówności Czebyszewa ocenić $P(|X - 75| < 30)$, gdzie X jest ilością trafień.
8. X ma rozkład normalny $N(0,1)$. Oszacować z góry $P(\{|X| \geq 3\})$ przy pomocy:
   - nierówności Czebyszewa
   - tablic
9. Zmienne losowe $X_i, i \in N$ są niezależne i mają jednakowe rozkłady $P(\{X_i = k\}) = 0,2$, gdzie $k = 1,2,3,4,5$. Znaleźć prawdopodobieństwo, że zmienna $Y = \sum_{i=1}^{100} X_i$ przyjmie wartość większą od 320.
10. Niech zmienna losowa X przyjmuje wartości dodatnie i istnieje $E(X)$ oraz $E(X) = a$. Udowodnić, że wtedy $P(\{X \geq 2a\}) \leq \frac{1}{2}$.
Wsk. Zastosować nierówność Markowa.
11. Rzucamy n razy symetryczną monetą. Niech zmienna losowa X_k oznacza wyrzucenie orła za k razem. Korzystając z nierówności, Czebyszewa oszacować n aby
$$P(\{\omega : |\frac{1}{n}\sum_{i+1}^{n} X_i(\omega) - \frac{1}{2}| < \frac{1}{10}\}) > \frac{9}{10}.$$
12. Niech $P(A) = p > 0$, N ilość niezależnych doświadczeń Zmienna losowa X_A odpowiada liczbie tych doświadczeń, w których zaobserwowano pojawienie się zdarzenia A. Oszacować liczbę N tak, aby prawdopodobieństwo zdarzenia $\{|\frac{1}{N}X_A - p| \leq d\}$ było nie mniejsze niż q (q bliskie jedności).
13. Przy jakiej liczbie rzutów kostką prawdopodobieństwo tego, że częstość wypadnięcia szóstki różni się od $\frac{1}{6}$ nie mniej niż o $\frac{1}{36}$, jest mniejsze niż 0.1?
14. X ma rozkład jednostajny na odcinku $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$
   - Oszacować z nierówności Czebyszewa $P(\{|X| \geq \frac{3}{2}\})$.

- Obliczyć $P(\{|X| \geq \frac{3}{2}\})$ bezpośrednio.

15. Zmienna losowa X ma rozkład wykładniczo-potęgowy $f(x) = \frac{x^m}{m!}e^{-x}, (x \geq 0)$. Wykazać prawdziwość nierówności

$$P(\{0 < X < 2(m+1)\}) > \frac{m}{m+1}$$

16. Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie Poissona (z parametrem λ). Dowieść, że

    - $P(\{X \geq 1\}) \leq \lambda$
    - $P(\{X \geq 2\}) \leq \frac{\lambda^2}{2}$

17. Niech X będzie zmienna losowa. Oznaczmy $a = E(X)$,$\sigma^2 = D(X_2), \gamma_r = E(|X - a|^r)$. Dowieść następujących nierówności

    - $P(\{|X - a| \geq \lambda\gamma_r^{\frac{1}{r}}\}) \leq \lambda^{-r}$
    - $P(\{|X - a| \geq \lambda\sigma) \leq \gamma_r(\sigma\lambda\})^{-r}$