ćwiczenia z rachunku prawdopodobieństwa
matematyka, III rok
lista 11

1. Udowodnić nierówność **Schwarza**, gdy $E(X^2) = 0$.

2. Z nierówności **Schwarza** w wywnioskować, że jeśli $E(X)$ istnieje i jest większa od zera wtedy $\frac{1}{E(X)} \leq E(\frac{1}{X})$.

3. Udowodnić nierónośċ **Minkowskiego**: jeśli $p \geq 1$, to

$$(E(|X+Y|^p))^{\frac{1}{p}} \leq (E(|X|^p))^{\frac{1}{p}} + (E(|Y|^p))^{\frac{1}{p}}$$

4. Niech zmienne losowe $X_1, \ldots, X_n$ są niezależne o jednakowych rozkładach,

$$m := E(X_k), \sigma^2 := D^2(X_k).$$

Stosując klasyczną nierówność Czebyszewa oszacować N dla ustalonego $a > 0$, by

$$P(\{| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} X_k - m |> a\}) \leq 0.05.$$

5. Z klasycznej nierówności Czebyszewa ocenić prawdopodobieństwo, że zmienna losowa normalna (tzn. $N(0,1)$) odchyli się od swojej wartości oczekiwanej o więcej niż
   - cztery średnie odchylenia,
   - trzy średnie odchylenia.

6. Rzucamy n razy monetą. Niech X ilość orłów. Korzystając z nierówności Czebyszewa znaleźć takie n aby $P(\{|\frac{1}{n}\mathrm{X}-\frac{1}{2}| < 1/10\}) > 9/10$.

7. Strzelamy 300 razy do tarczy z prawdopodobieństwem trafienia w jednym strzale wynoszącym 1/4. Z nierówności Czebyszewa ocenić $P(|X - 75| < 30)$, gdzie X jest ilością trafień.

8. X ma rozkład normalny $N(0,1)$. Oszacować z góry $P(\{|X| \geq 3\})$ przy pomocy:
   - nierówności Czebyszewa
   - tablic

9. Zmienne losowe $X_i, i \in N$ są niezależne i mają jednakowe rozkłady $P(\{X_i = k\}) = 0,2$, gdzie $k = 1,2,3,4,5$. Znaleźć prawdopodobieństwo, że zmienna $Y = \sum\limits_{i=1}^{100} X_i$ przyjmie wartość większą od 320.

10. Niech zmienna losowa X przyjjmuje wartości dodatnie i istnieje $E(X)$ oraz $E(X) = a$. Udowodnić, że wtedy $P(\{X \geq 2a\}) \leq \frac{1}{2}$.
    Wsk. Zastosować nierówność Markowa.

11. Rzucamy n razy symetryczną monetą. Niech zmienna losowa X_k oznacza wyrzucenie orła za k razem. Korzystając z nierówności, Czebyszewa oszacować n aby

$$P(\{\omega : |\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i(\omega) - \frac{1}{2}| < \frac{1}{10}\}) > \frac{9}{10}.$$

12. Przy jakiej liczbie rzutów kostką prawdopodobieństwo tego, że częstość wypadnięcia szóstki różni się od $\frac{1}{6}$ nie mniej niż o $\frac{1}{36}$, jest mniejsze niż 0.1?

13. X ma rozkład jednostajny na odcinku $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$
    - Oszacować z nierówności Czebyszewa $P(\{|X| \geq \frac{3}{2}\})$.
    - Obliczyć $P(\{|X| \geq \frac{3}{2}\})$ bezpośrednio.

14. Zmienna losowa X ma rozkład wykładniczo-potęgowy $f(x) = \frac{x^m}{m!}e^{-x}, (x \geq 0)$. Wykazać prawdziwość nierówności

$$P(\{0 < X < 2(m+1)\}) > \frac{m}{m+1}$$

15. Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie Poissona (z parametrem λ). Dowieść, że
    - $P(\{X \geq 1\}) \leq \lambda$
    - $P(\{X \geq 2\}) \leq \frac{\lambda^2}{2}$
16. Niech X będzie zmienna losowa. Oznaczmy $a = E(X)$, $\sigma^2 = D(X_2), \gamma_r = E(|X-a|^r)$. Dowieść następujących nierówności
    - $P(\{|X-a| \geq \lambda\gamma_r^{\frac{1}{r}}\}) \leq \lambda^{-r}$
    - $P(\{|X-a| \geq \lambda\sigma) \leq \gamma_r(\sigma\lambda\})^{-r}$
17. Dowieść następującego twierdzenia: *Dla dowolnej zmiennej losowej X i dla $t > 0$ zachodzi* $P(\{\omega : tX(\omega) > t^2 + \ln E(e^{aX}\}) < e^{t^2}$.
18. Niech $f : R \to R$ będzie funkcją nieujemną, parzystą i niemalejącą dla $x > 0$. Dowieść że dla dowolnej zmiennej losowej X i dowolnie wybranej stałej $c > 0$ spełniona jest nierówność
    - jeżeli $|f| \leq K < \infty$, to $P(\{\omega : |X(\omega)| \geq c\}) \geq \frac{E(f(X)) - f(c)}{K}$.
    - jeżeli $|X| \leq M < \infty$, to $P(\{\omega : |X(\omega)| \geq c\}) \geq \frac{E(f(X)) - f(c)}{f(M)}$ (nierówność Kołmogorowa).
19. Rzucamy 180 razy kostką do gry. Obliczyć prawdopodobieństwo, że otrzymamy 32 razy szóstkę.
20. Korzystając z twierdzenia Moivre'a - Laplace'a oszacować prawdopodobieństwo, że w 720 rzutach kostką ilość szóstek będzie
    - zawierać się pomiędzy 121 a 140
    - mniejsza niż 125
    - większa niż 110
21. Wykonujemy 1000 rzutów symetryczną kostką. Korzystając z twierdzenia Moivre'a - Laplace'a oszacować przedział, w jaki z prawdopodobieństwem 0,9 wpada ilość otrzymanych szóstek.
22. Wydział Matematyki pragnąłby przyjąć nie więcej niż 120 kandydatów. Zdających jest 250, a szansa zaliczenia testu wynosi 0,4. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wydział będzie miał kłopot z nadmiarem kandydatów?
23. Prawdopodobieństwo pojawienia się zdarzenia w jednym doświadczeniu wynosi 0,3. Z jakim prawdopodobieństwem można twierdzić, że częstość tego zdarzenia przy 100 doświadczeniach będzie zawarta w granicach od 0,2 do 0,4?
24. Stosując twierdzenie Moivre'a-Laplace'a obliczyć prawdopodobieństwo tego, że w 800 niezależnych próbach ilość sukcesów będzie większa niż 150, a mniejsza niż 250, jesli prawdopodobieństwo sukcesu w każdej próbie jest równe $\frac{1}{4}$.
25. Na campusie uniwersyteckim sa dwie restauracje po 120 miejsc każda. Wiadomo, że codziennie 200 osób będzie chciało zjeść obiad a wybory restauracji dokonują losowo - powiedzmy, rzucając symetryczną monetą. Jaka jest szansa, że w którejś restauracji zabraknie miejsc? Ile miejsc należy przygotować w każdej restauracji, by powyższe prawdopodobieństwo było mniejsze od 0,001?