ćwiczenia z rachunku prawdopodobieństwa
matematyka, III rok
lista 12

1. Podać przykład ciągu zmiennych losowych określonych na tej samej przestrzeni Ω, zbieżnego według rozkładu, który nie jest zbieżny według prawdopodobieństwa.

2. Wykazać, że jeśli $X, X_1, X_2, \ldots$ są zmiennymi losowymi, t.że $X_n \xrightarrow{D} X$, gdzie $P(X = c) = 1$, $c \in R$, to $X_n \xrightarrow{P} c$.

3. Udowodnić, że jeśli $X_n \xrightarrow{D} X$, $a, b \in R$, to $aX_n + b \xrightarrow{D} aX + b$.

4. Udowodnić, że jeśli $X_n \xrightarrow{D} X$, $Y_n \xrightarrow{D} 0$, to $X_n + Y_n \xrightarrow{D} X$.

5. Udowodnić, że jeśli $X_n \xrightarrow{D} X$, $Y_n \xrightarrow{D} c$, to $X_n + Y_n \xrightarrow{D} X + c$.

6. Podać przykład zmiennych losowych X_n, Y_n, X, Y t.że $X_n \xrightarrow{D} X$ oraz $Y_n \xrightarrow{D} Y$, ale nieprawda, że $X_n + Y_n \xrightarrow{D} X + Y$.

7. Udowodnić, że jeśli $X_n \xrightarrow{D} X$, $Y_n \xrightarrow{D} 0$, to $X_nY_n \xrightarrow{D} 0$.

8. Udowodnić, że jeśli $X_n \xrightarrow{D} X$, $Y_n \xrightarrow{D} a$, to $X_nY_n \xrightarrow{D} aX$.

9. **(owad i mrówki)** Owad składa jaja zgodnie z rozkładem Poissona z parametrem a. W nocy mrówki kradną mu jaja: szansa, że dane jajo zostanie ukradzione, wynosi q. Następnego dnia historia się powtarza (liczba złożonych jaj ma ten sam rozkład, co poprzedniego dnia i jest niezależna od przeszłości), itd. Jaki jest rozkład graniczny liczby jaj ocalonych przed mrówkami?

10. Niech $X_n \xrightarrow{D} X$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, a - punkt ciągłości dystrybuanty F_X. Udowodnić, że $\lim_n F_{X_n}(a_n) = F(a)$.

11. Niech (X_n) będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $U[0, 1]$ oraz $Y_n = n \cdot min(X_1, \ldots, X_n)$. Czy istnieje taka zmienna losowa Y, że $Y_n \xrightarrow{D} Y$?

12. Udowodnić, że jeśli $\{X_n : n \in N\}$ jest ciągiem zmiennych losowych, dla którego spełniony jest warunek: istnieje skończona wariancja $D^2(X_n)$ dla $n \in N$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} D^2(X_n) = 0$ (zwanym warunkiem Markowa), to ciąg $\{X_n - E(X_n) : n \in N\}$ jest zbieżny według prawdopodobieństwa (stochastycznie) do zera.

13. Pokazać, że granica według prawdopodobieństwa jest wyznaczona jednoznacznie.

14. Udowodnić, że jeżeli ciąg zmiennych losowych $\sqrt{X_n}$ jest zbieżny w L^2, to ciąg X_n jest zbieżny w L^1.

15. Jeśli $X_n \xrightarrow{p.n} X$, to $X_n \xrightarrow{P} X$.

16. X_n ciąg jednakowych zmiennych losowych. Zdefiniujmy $Y_n = \prod\limits_{j=1}^{n} X_j$. Udowodnić, że jeżeli Y_n jest zbieżny z prawdopodobieństwem 1 do stałej a, to $a = 0$ lub $a = 1$.

17. Dany jest ciąg zmiennych losowych przyjmujących wartości $a > 0$ na odcinku $< 0, \frac{1}{2^n} >$, 0 na odcinku $(\frac{1}{2^n}, 1 >$ z prawdopodobieństwami równymi długości odcinków. Wykazać, że tak określony ciąg X_n zmiennych losowych jest zbieżny według prawdopodobieństwa.

18. Niech $\{X_n : n \in N\}$ będzie ciągiem zmiennych losowych dla których z prawdopodobieństwem 1 mamy $|X_n| \leq c < \infty$. Dowieść, że $X_n \to 0$ według prawdopodobieństwa wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim\limits_{n\to\infty} E(|X_n|) = 0$.

19. Niech $\{X_n : n \in N\}$ będzie ciągiem zmiennych losowych takich, że $P(\{\omega : X_n(\omega) = \pm\frac{1}{n}\}) = \frac{1}{2}$. Wykazać, że ciąg ten jest zbieżny z prawdopodobieństwem 1 i według prawdopodobieństwa.

20. Niech $\{X_n : n \in N\}$ będzie ciągiem zmiennych losowych takich, że $P(\{\omega : X_n(\omega) = -n - 4\}) = \frac{1}{n+4}, P(\{\omega : X_n(\omega) = n + 4\} = \frac{3}{n+4}$ i $P(\{\omega : X_n(\omega) = -1\}) = 1 - \frac{4}{n+4}$. Wykazać, że
    - Wykazać, że X_n jest zbieżny według prawdopodobieństwa.
    - $E(\lim_{n\to\infty} X_n) \neq \lim_{n\to\infty} E(X_n)$.