

1. Funkcja $F(x, y)$ jest określona następująco:

- a) $F(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \text{ i } y < 0 \\ 1 & \text{w.p.p} \end{cases}$
- b) $F(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \text{ lub } y < 0 \\ 1 & \text{w.p.p} \end{cases}$
- c) $F(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x + y \geq 0 \\ 0 & \text{w.p.p} \end{cases}$

Zbadać czy tak określona funkcja może być traktowana jako dystrybuanta pewnej zmiennej losowej (X, Y) .

2. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma gęstość

$$f(x, y) = \begin{cases} cx(x-y) & \text{dla } 0 < x < 2, -x < y < x \\ 0 & \text{w.p.p} \end{cases}$$

- a) obliczyć stałą c ;
b) obliczyć $P((X, Y) \in A)$, gdzie $A = \{(x, y) : 0 < x < 2, 0 < y < x\}$.

3. Dana jest funkcja

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{8}(x^2 - y^2)e^{-x} & \text{dla } |y| \leq x \\ 0 & \text{w.p.p} \end{cases}$$

Zbadać czy tak określona funkcja jest gęstością dwuwymiarowej zmiennej losowej (X, Y) .

4. Niech

$$f(x, y) = \begin{cases} c(x^2 + y^2) & \text{dla } (x, y) \in K \\ 0 & \text{w.p.p} \end{cases}$$

gdzie $K = \{(x, y) \in R^2 : 0 \leq x \leq 1, x - 1 \leq y \leq 1 - x\}$

- a) wyznaczyć stałą c tak, aby funkcja $f(x, y)$ była gęstością pewnej zmiennej losowej (X, Y) ;
b) obliczyć $P(X^2 + Y^2 \leq 0,5)$.

5. Zmienna losowa dwuwymiarowa (X, Y) ma rozkład jednostajny wewnątrz prostokąta ograniczonego odciętymi $x = a, x = b$ i rzędnymi $y = c, y = d$ ($b > a, d > c$). Znaleźć gęstość prawdopodobieństwa i dystrybuantę tej zmiennej losowej.

6. Niech (X, Y, Z) będzie trzywymiarową zmienną losową o gęstości $f(x, y, z) = cg(x, y, z)$. Wyznaczyć stałą c , jeżeli:

- a) $g(x, y, z) = 1$ dla $0 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 3, 4 \leq z \leq 5$ i $g(x, y, z) = 0$ w pozostałej części R^3 ;
b) $g(x, y, z) = 1$ dla $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ i $g(x, y, z) = 0$ w pozostałej części R^3 ;
c) $g(x, y, z) = x^{l-1}y^{m-1}z^{n-1}$ dla $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ i $g(x, y, z) = 0$ w pozostałej części R^3 gdzie $l \geq 1, m \geq 1, n \geq 1$.

7. Zmienna losowa (X, Y) ma gęstość

$$f(x, y) = \frac{a}{\pi^2(16 + x^2)(25 + y^2)},$$

- a) wyznaczyć parametr a ;
b) znaleźć dystrybuantę $F(x, y)$.

8. Wyznaczyć gęstość prawdopodobieństwa trzywymiarowej zmiennej losowej (X, Y, Z) mając daną dystrybuantę

$$F(x, y, z) = (1 - e^{-ax})(1 - e^{-by})(1 - e^{-cz})$$

dla $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

9. Funkcja

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-y} & \text{dla } 0 \leq x < \infty, x \leq y < \infty \\ 0 & \text{w.p.p} \end{cases}$$

określa gęstość zmiennej losowej (X, Y) . Obliczyć dystrybuantę tej zmiennej.

10. Wyznaczyć dystrybuantę $F(x, y)$ dwuwymiarowej zmiennej losowej (X, Y) , jeśli dana jest jej gęstość

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{dla } 0 \leq x < 1, x \leq y \leq 2 - x \\ 0 & \text{w.p.p} \end{cases}$$

11. Obliczyć prawdopodobieństwo trafienia punktu o współrzędnych (X, Y) w obszar określony nierównościami $1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2$, jeżeli współrzędne punktu (X, Y) mają następującą dystrybuantę

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 - a^{-x^2} - a^{-y^2} + a^{-x^2-2y^2} & \text{dla } x \geq 0, y \geq 0, \\ 0 & \text{w.p.p} \end{cases}$$

12. Współrzędne punktu losowego (X, Y) mają rozkład jednostajny wewnątrz prostokąta ograniczonego odciętymi 0 i a oraz rzędnymi 0 i b . Obliczyć prawdopodobieństwo trafienia punktu losowego w koło o promieniu R , jeżeli $a > b$, a środek koła pokrywa się z początkiem układu współrzędnych.

13. Gęstość prawdopodobieństwa układu zmiennych losowych (X, Y) dana jest wzorem

$$f(x, y) = \begin{cases} c(R - \sqrt{x^2 + y^2}) & \text{dla } x^2 + y^2 \leq R^2 \\ 0 & \text{w.p.p} \end{cases}$$

Wyznaczyć stałą c oraz prawdopodobieństwo trafienia w koło o promieniu $a < R$ ze środkiem w początku układu współrzędnych.

14. Zmienna losowa dwuwymiarowa (X, Y) ma rozkład dany gęstością

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{4}{3x^2y^2} & \text{dla } x \geq 1, \frac{1}{x} \leq y \leq x^2 \\ 0 & \text{w.p.p} \end{cases}$$

Znaleźć dystrybuantę tej zmiennej losowej.

15. Niech $\lambda > 0$ oraz niech

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \alpha e^{-\lambda(x+y+z)} & \text{dla } x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \\ 0 & \text{w.p.p} \end{cases}$$

Dla jakiej wartości parametru α funkcja $f(x, y, z)$ jest gęstością wektora losowego? Wyznaczyć dystrybuantę tej zmiennej losowej.

16. Rzucamy trzy razy monetą. Niech zmienna losowa X przyjmuje wartości równe ilości wyrzuconych orłów, natomiast zmienna losowa Y przyjmuje wartość 0, jeśli w pierwszym rzucie wypadł orzeł lub wartość 1, jeśli w pierwszym rzucie wypadła reszka. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej (X, Y) .

17. Z jednostkowego kwadratu $[0, 1] \times [0, 1]$ wybieramy losowo punkt (x, y) . Zmienne losowe X i Y przyjmują wartości równe odpowiednio odciętej oraz sumie współrzędnych wylosowanego punktu. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej (X, Y) .