ćwiczenia z rachunku prawdopodobieństwa
matematyka, III rok
lista 16

1. X, Y są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie wykładniczym. Wykazać, że zmienne $X+Y$, $\frac{X}{Y}$ są niezależnymi zmiennymi losowymi.

2. Niech niezależne zmienne losowe X, Y mają rozkład wykładniczy z parametrem λ. Wyznaczyć $E(X+Y)$ oraz $E(X-Y)$.

3. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład o gęstości:
$$f(x,y) = \frac{1}{300\pi} exp\{-\frac{1}{2}[\frac{(x-30)^2}{100} + \frac{(y-40)^2}{225}]\}$$
Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że suma kwadratów standaryzowanych zmiennych losowych X i Y nie przekracza 1.

4. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład normalny o gęstości:
$$f(x,y) = c \cdot exp[-\frac{2}{3}(x^2 - \frac{1}{2}xy + \frac{1}{4}y^2)].$$
Wyznaczyć stałą c, współczynnik korelacji, oraz macierz kowariancji.

5. Wykazać, że wariancja iloczynu dwóch niezależnych zmiennych losowych X i Y wyraża się wzorem
$$D^2(XY) = \sigma_1^2\sigma_2^2 + \alpha_1^2\sigma_2^2 + \alpha_2^2\sigma_1^2,$$
gdzie $\alpha_1 = E(X),\ \alpha_2 = E(Y),\ \sigma_1^2 = D^2(X),\ \sigma_2^2 = D^2(Y)$.

6. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład mormalny o parametrach $m_1 = 2,\ m_2 = 1,\ \sigma_1 = 1,5,\ \sigma_2 = 0,8,\ \rho = 0,6$. Podać gęstość tego rozkładu.

7. Trójwymiarowa zmienna losowa (X, Y, Z) ma rozkład normalny z zerowym wektorem wartości przeciętnych i macierzy kowariancji:
$$M = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$
Napisać gęstość tego rozkładu.

8. Trójwymiarowa zmienna losowa (X, Y, Z) ma rozkład o gęstości
$$f(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\sqrt{6\pi}} exp\{-\frac{1}{12}[6x^2 + 4(y-1)^2 + (z+2)^2 - 2(y-1)(z+2)]\}$$
   - wyznaczyć macierz kowariancji;
   - obliczyć $E(XY)$;
   - obliczyć $E[Y(Y-Z)]$.

9. Dane są niezależne zmienne losowe X i Y, gdzie $X \sim Exp(\lambda), Y \sim Exp(\mu)$. Niech $Z = \max(X, Y)$. Wyznaczyć $E(Z^n)$.