ćwiczenia z rachunku prawdopodobieństwa
matematyka, III rok
lista 18

1. Ciąg zmiennych losowych niezależnych X_n spełnia warunek $\frac{1}{n}D(X_n) \longrightarrow 0$ przy $n \longrightarrow \infty$. Dowieść, że ciąg ten spełnia SPWL (twierdzenie Chińczyna)

2. Niech będzie dany ciąg niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie $\{X_n | n \geq 1\}$ taki, że $E(X_1) = 0$ i $D^2(X_1) = 1$. Określmy ciąg

   - $Y_n = a + \alpha^n X_n$;
   - $Y_n = a + n^\alpha X_n$.

   Dla jakich wartości parametru α spełnia on SPWL?

3. Niech będzie dany ciąg niezależnych zmiennych losowych

   - $\{X_n | n \geq 2\}$ i $P(X_n = \pm\sqrt{n}) = \frac{1}{n}, P(X_n = 0) = 1 - \frac{2}{n}$;
   - $\{X_n | n \geq 1\}$ i $P(X_n = n) = \frac{1}{1+n^2}, P(X_n = -\frac{1}{n}) = \frac{n^2}{1+n^2}$;
   - $\{X_n | n \geq 3\}$ i $P(X_n = \pm \ln n) = \frac{1}{2}$;
   - $\{X_n | n \geq 1\}$ i $P(X_n = \pm 1) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right), P(X_n = 2^{\pm n}) = \frac{1}{2^{n+1}}$.

   Czy ciąg ten spełnia SPWL?

4. Niech dany będzie ciąg $\{X_n | n \geq 1\}$ niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $P(\{X = \pm n^\beta\}) = \frac{1}{2n^\alpha}, P(\{X = 0\}) = 1 - \frac{1}{n^\alpha}$, gdzie $\alpha, \beta > 0$. Przy jakiej zależności miedzy parametrami α, β spełnia on SPWL?

5. Niech będzie dany ciąg zmiennych losowych $\{X_n | n \geq 2\}$ taki, że $X_n \in N(0, \ln n)$. Czy spełnia on SPWL?

6. Niech będzie dany ciąg zmiennych losowych $\{X_n | n \geq 1\}$ taki, że $P(X_n = \pm 2^n) = 2^{-(2n+1)}$, $P(X_n = 0) = 1 - 2^{-2n}$. Niech X_n zbiega z według prawdopodobieństwa do X podać wzór na zmienną losowej X i pokazać powyższą zbieżność.

7. Niech X_n będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładach równomiernych na odcinku $]1, 2[$. Wyznaczyć granicę $Y_n = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} X_n}$.

8. Niech X_n będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych takich, że

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt[4]{n}} \exp\left\{-\frac{(x - c^n)^2}{\sqrt{n}}\right\}, c \in (0, 1), n \in N.$$

   Czy ciąg spełnia SPWL?

9. Zmienna losowa X_k przyjmuje wartości równe k rzutowi kostki do gry. Wyznaczyć granicę ciągu $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$.

10. Niech $\{X_k | k \in N\}$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie:

$$P(\{\omega | X_k(\omega) = i\}) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{i-1}, i, k \in N.$$

   Wykazać, że dla zmiennej losowej $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ zachodzi SPWL.

11. Niech $\{X_k | k \in N\}$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie:

$$P(\{\omega | X_k(\omega) = \frac{(-1)^i}{i}\}) = \frac{1}{2^i}, i, k \in N.$$

   Wykazać, że dla zmiennych losowych zachodzi SPWL.

12. Niech $\{X_k | k \in N\}$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie Poissona:

$$P(\{\omega | X_k(\omega) = i\}) = \frac{e^{-1}}{i!}, k \in N, i \in N \cup \{0\}.$$

Wykazać, że dla zmiennych losowych zachodzi SPWL.

13. Rozstrzygnąć, czy dla ciągu $\{X_n | n \geq 1\}$ niezależnych zmiennych losowych o niżej podanych rozkładach są spełnione warunki dostateczne stosowalności SPWL

- $P(X_n = \pm 2^n) = \frac{1}{2}$;
- $P(X_n = \pm n) = \frac{1}{2} n^{-\frac{1}{2}}, P(X_n = 0) = 1 - n^{-\frac{1}{2}}$.