

1. Policzyc funkcje charakterystyczne rozkładów:

- rozkładu Bernoulliego;
- rozkładu Poissona;
- rozkładu dwupunktowego ($1 > p > 0$, $P(X = 1) = p$, $P(X = 0) = 1 - p$);
- rozkładu geometrycznego;
- zmiennej losowej, która przyjmuje wartości równe ilości wyrzuconych oczek kostką do gry;
- rozkładu jednostajnego na odcinku $(-1, 1)$;
- rozkładu trójkątnego równoramiennego na odcinku $[-1, 1]$;
- rozkładu wykładniczego;
- rozkładu Laplace'a;
- rozkładu Cauchy'ego;
- rozkładu $N(0, 1)$;
- rozkładu $N(m, \sigma)$.

2. Wyznaczyć funkcję charakterystyczną ilości pojawień się zdarzenia A przy n niezależnych doświadczeniach, jeśli prawdopodobieństwo pojawienia się zdarzenia A jest dla każdego doświadczenia różne i dla k -tego doświadczenia równe p_k ($k = 1, 2, \dots, n$).

3. Wyznaczyć funkcję charakterystyczną zmiennej losowej X o rozkładzie

$$P(\{\omega : X(\omega) = m\}) = \frac{a^m}{(1+a)^{m+1}} \quad a > 0, m \in N \cup \{0\}.$$

Następnie wyznaczyć wartość oczekiwaną i wariancję w oparciu o funkcję charakterystyczną.

4. Sprawdzić, że funkcja charakterystyczna φ rozkładu zmiennej losowej posiada własności:

- $|\varphi(t)| \leq \varphi(0) = 1$;
- dla dowolnej liczby naturalnej n , dowolnych liczb zespolonych z_1, \dots, z_n oraz dowolnych t_1, \dots, t_n , spełniona jest nierówność

$$\sum_{k,l=1}^n \varphi(t_k - t_l) z_k \bar{z}_l \geq 0$$

c) $\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)}$

5. Czy funkcja

- $f(t) = \exp(-|t|i)$;
- $\phi(t) = \frac{1}{1+i|t|}$

może być funkcją charakterystyczną pewnego rozkładu?

6. Wiedząc, że funkcja ϕ jest funkcją charakterystyczną udowodnić, że funkcja sprzężona jest również funkcją charakterystyczną.

7. Mając daną funkcję charakterystyczną znaleźć rozkład zmiennej losowej:

- $\phi(t) = \frac{1}{4}(\exp(-it) + \exp(it))^2$;
- $\phi(t) = \frac{1}{4}(1 + \exp(it))^2$;
- $\phi(t) = \cos(t)$;
- $\phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(kt)$, $a_k > 0$, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1$;
- $\phi(t) = \frac{1}{2-e^{it}}$.

8. (nie obowiązuje) Mając daną funkcję charakterystyczną znaleźć rozkład zmiennej losowej:
- a) $\phi(t) = e^{-a|t|}$, $a > 0$;
 - b) $\phi(t) = \frac{1+it}{1+t^2}$;
 - c) $\phi(t) = \frac{1-it}{1+t^2}$;
 - d) $\phi(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}$;
 - e) $\phi(t) = \frac{1}{1+t^2}$.
9. Obliczyć momenty zmiennej losowej X z ostatniego przykładu zadania 8.
10. Korzystając z funkcji charakterystycznej policzyć:
- a) wartość oczekiwaną dla rozkładu Poissona;
 - b) k -ty moment zmiennej losowej o rozkładzie wykładniczym z parametrem λ ;
 - c) k -ty moment zmiennej losowej o rozkładzie Poissona.
11. Danych jest n niezależnych zmiennych losowych o jednakowych rozkładach równomiernych na odcinku $(-1, 1)$. Obliczyć funkcję charakterystyczną zmiennej losowej będącej sumą danych zmiennych.
12. Funkcja charakterystyczna zmiennej losowej X ma postać $\phi(t) = e^{-|t|}$. Czy istnieje $E(X)$?
13. Niech X_1, \dots, X_n będą zmiennymi losowymi niezależnymi o rozkładzie Poissona z parametrami odpowiednio $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Korzystając z własności funkcji charakterystycznych pokazać, że zmienna losowa $Y = X_1 + \dots + X_n$ ma rozkład Poissona.
14. Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach normalnych standaryzowanych. Znaleźć rozkład zmiennej losowej $Z = X - Y$.