

ćwiczenia z rachunku prawdopodobieństwa  
matematyka, III rok  
lista 2

1. Niech  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Znaleźć najmniejsze  $\sigma$ -ciało  $\mathcal{F}$  zawierającą rodzinę  $\mathcal{R} = \{\{1\}, \{1, 3, 5\}, \{5\}\}$ .
2. Przestrzeń  $\Omega$  zawiera  $n$  zdarzeń elementarnych. Jaka jest minimalna i maksymalna możliwa liczba zdarzeń losowych tej przestrzeni?
3. Czy może się zdarzyć, że liczba zdarzeń elementarnych przestrzeni  $\Omega$  jest większa od liczby zdarzeń losowych tej przestrzeni?
4. Niech  $\Omega = [0, 1]$  oraz niech  $\mathcal{F}$  będzie pewnym  $\sigma$ -ciałem podzbiorów odcinka  $[0, 1]$ . Udowodnić, że funkcja

$$P(A) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } \frac{1}{2} \in A \\ 0 & \text{gdy } \frac{1}{2} \notin A \end{cases}$$

określona na zbiorach  $A \in \mathcal{F}$  spełnia aksjomaty prawdopodobieństwa.

5. Rzucamy symetryczną monetą do chwili wyrzucenia orła. Skonstruować zbiór zdarzeń elementarnych i określić odpowiednie prawdopodobieństwa. Jaka jest szansa, że liczba rzutów będzie parzysta? podzielna przez 3? podzielna przez  $m$ ?
6. Pokazać, że jeśli  $P(A) = 0,7$  i  $P(B) = 0,8$ , to  $P(A \cap B) \geq 0,5$ .
7. Ile liczb należy wylosować ze zbioru  $\{0, 1, \dots, 9\}$ , aby prawdopodobieństwo wystąpienia wśród nich liczby 7 był nie mniejsze niż 0,9? Uwzględnić schemat losowania ze zwracaniem i bez zwracania.
8. Ze zbioru liczb od 1 do 10 wybieramy kolejno dwie (bez zwracania) i od pierwszej odejmujemy drugą. Jakie jest prawdopodobieństwo, że ich różnica będzie większa od 2.
9. Obliczyć prawdopodobieństwo, że dwa losowo wybrane wierzchołki sześcianu jednostkowego będą odległe o więcej niż 1.

**zadania do samodzielnego rozwiązania:**

1. Dane są  $P(A') = \frac{1}{3}$ ,  $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$  i  $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$ . Obliczyć  $P(B')$ ,  $P(A \cap B')$  i  $P(B \setminus A)$ .
2. Dane są  $P(A' \cap B') = \frac{1}{2}$ ,  $P(A') = \frac{2}{3}$ , ponadto  $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ . Obliczyć  $P(B)$  i  $P(A' \cap B)$ .
3. Jakie jest prawdopodobieństwo, że sześcian losowo wybranej liczby spośród liczb od 0 do 999 kończy się na 11?
4. Ze zbioru  $X$ , gdzie  $X = \{1, \dots, n\}$ , ( $n \geq 2$ ), losujemy kolejno dwie liczby. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że pierwsza z wylosowanych liczb jest większa od drugiej.
5. Czy prawdą jest, że w dowolnej przestrzeni probabilistycznej  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  dla dowolnego  $A \in \mathcal{F}$  zachodzi równoważność

$$P(A) = 0 \iff A = \emptyset.$$