ćwiczenia z rachunku prawdopodobieństwa
matematyka, III rok
lista 20

1. Prawdopodobieństwo pojawienia się zdarzenia w jednym doświadczeniu wynisi $0,3$. Z jakim prawdopodobieństwem można twierdzić, że częstość tego zdarzenia przy 100 doświadczeniach będzie zawarta w granicach od $0,2$ do $0,4$?

2. Józio założył się z Olkiem, że w 100 rzutach kostką uzyska w sumie nie mniej niż 400 oczek i w tym celu rozpoczął ćwiczenia. Ile serii po 100 rzutów musi średnio wykonać, żeby doczekać się takiego wyniku?

3. Rzucono 1000 razy kostką. Znaleźć prawdopodobieństwo, że suma oczek będzie zawarta między 3410 a 3590?

4. Na poczcie pojawia się 100 klientów dziennie, każdy z nich dokonuje wpłaty (bądź wypłaty) X_i, $i = 1, 2, \ldots 100$, gdzie X_i są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie, zerowej średniej i wariancji równej 100^2. Ile gotówki należy mieć w kasie rano, by z prawdopodobieństwem $0,99$ na koniec dnia nie zabrakło pieniędzy? Zakładamy, że w ciągu dnia ewentualne braki uzupełnia naczelnik, ale wieczorem chce odzyskać swoje pieniądze.

5. W Polsce jest $24,6$ mln podatników i każdy z nich myli się przy wypełnianiu zeznanania podatkowego. Wartość błędu dla i-tego podatnika jest zmienna losową X_i, gdzie $E(X_i) = 0$ i $D^2(X_i) = 10000$, czyli $D(X_i) = 100$ (złotych); ponadto zakładamy niezależność X_i. Jaka jest szansa, że straty państwa w wyniku tych błędów przekroczą 1 grosz na podatnika? A 3 grosze?

6. Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots,$ są niezależne i $P(X_k = k) = P(X_k = -k) = \frac{1}{2}$. Niech $s_n^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} D^2(X_k)$. Zbadać zbieżność według rozkładu ciągu
$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{s_n}.$$

7. Zmienna losowa X_λ ma rozkład Poissona z parametrem λ. Zbadać zbieżność według rozkładu zmiennych losowych $\frac{(X_\lambda - \lambda)}{\sqrt{\lambda}}$ dla $\lambda \to \infty$.

8. Dane są ciągi $\{X_n\}$ i $\{Y_n\}$ niezależnych zmiennych losowych, przy czym $P(X_n = \frac{1}{n^\alpha}) = P(X_n = -\frac{1}{n^\alpha}) = p$, $P(X_n = 0) = 1 - 2p$, $0 < p < \frac{1}{2}$, $\frac{1}{3} < \alpha \leq \frac{1}{2}$, $P(Y_n = \sqrt{n}) = P(Y_n = -\sqrt{n}) = \frac{1}{2}$. Dowieść, że każdy z tych ciągów spełnia CTG.

9. Funkcja $p(x) = \frac{1}{3}$ dla $x \in (-1, 0)$, $p(x) = \frac{2}{3}$ dla $x \in [0, 1)$ i $p(x) = 0$ dla $x \notin (-1, 1)$ jest gęstością każdej z niezależnych zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots$ Znaleźć przybliżoną wartość prawdopodobieństwa $P(S_n < 13)$ dla $n = 60$.

10. Każda z niezależnych zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots X_n$ ma ten sam rozkład oraz wariancję równą 5.
    a) Znaleźć prawdopodobieństwo, że średnia arytmetyczna tych zmiennych $\frac{S_n}{n}$ różni się dla $n = 4500$ o co najwyżej $0,04$ od wartości średniej $a = E(X_1)$.
    b) Ile zmiennych losowych X_k trzeba wziąć, aby z prawdopodobieństwem nie mniejszym od $0,9974$ różnica $|\frac{S_n}{n} - a|$ nie przekraczała $0,01$?

11. Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne, mają ten sam rozkład i $E(X_1) = 0$, $D^2(X_1) = 1$. Wykazać, że
$$U_n = \frac{\sqrt{n}(X_1 + \ldots + X_n)}{X_1^2 + \ldots + X_n^2} \longrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$$