

ćwiczenia z rachunku prawdopodobieństwa
matematyka, III rok
lista 3

1. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana z odcinka $[-\pi, \pi]$ liczba x należy do dziedziny funkcji $f(x) = \frac{\ln(1-2\cos x)}{\sqrt{\sin^2 x - \frac{1}{2}}}$.
2. **Problem Buffone'a.** Płaszczyzna jest pokryta prostymi równoległymi w odstępach równych a . Na tą płaszczyznę rzucamy igłę o długości $l, l < a$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że igła przetnie jedną z prostych ?
3. Monetę o promieniu r rzucamy na parkiet utworzony z przystających kwadratów o boku $2a$. Obliczyć prawdopodobieństwo, że moneta przykryje przynajmniej dwa kwadraty, jeśli $r < a$.
4. Jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia, że pierwiastki równania

$$x^2 + 2bx + c = 0$$

są rzeczywiste, jeśli liczby b i c zostały wybrane losowo z przedziału $[0, 1]$?

5. Z kwadratu jednostkowego wybrano losowo punkt o współrzędnych (x, y) . Wyznacz funkcje:
 - a) $f(a) = P(\min(x, \frac{1}{2}) < a)$,
 - b) $g(a) = P(\max(x, \frac{1}{3}) < a)$,
 - c) $h(a) = P(\min(x, y) < a)$.
6. Z odcinka o długości 1 wybrano losowo dwa punkty. Jakie jest prawdopodobieństwo, że ani jedna z otrzymanych w ten sposób części nie będzie krótsza od a , gdzie $0 \leq a \leq \frac{1}{3}$?
7. Odcinek długości l dzielimy losowo na trzy części. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że z uzuyskanych odcinków można zbudować trójkąt?
8. Na odcinku AB o długości jednostkowej umieszczono losowo dwa punkty L i M . Wyznacz prawdopodobieństwo, że L jest bliżej do M niż do A .
9. Na okręgu umieszczono losowo trzy punkty: A, B, C . Jakie jest prawdopodobieństwo, że trójkąt ABC jest ostrokątny ?
10. Jakie jest prawdopodobieństwo, że suma dwóch na chybił trafił wybranych liczb dodatnich, z których każda jest nie większa od jedności, jest nie większa od jedności, a ich iloczyn jest nie większy od $\frac{2}{9}$?
11. Z koła o promieniu R wybieramy losowo jeden punkt. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że odległość tego punktu od ustalonej średnicy koła jest większa od $a, 0 < a < R$.
12. Dwóch przyjaciół umówiło się na spotkanie pomiędzy godziną 10 a 11. Przychodzą na umówione spotkanie niezależnie od siebie i każdy z nich zobowiązał się czekać 15 minut. Jeśli w tym czasie przyjaciel się nie pojawi, to oczekujący odchodzi. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że się spotkają?

zadania do samodzielnego rozwiązania:

1. **Paradoks Bertranda.** W sposób losowy kreślimy cięciwę okręgu. Obliczyć prawdopodobieństwo, że cięciwa jest dłuższa od boku trójkąta równobocznego wpisanego w koło ograniczone danym okręgiem.
2. W dany kwadrat o boku $2a$ wpisujemy koło, a następnie w koło kolejny kwadrat. Wybieramy losowo punkt z większego kwadratu. Obliczyć prawdopodobieństwo, że wybrany punkt należy do kwadratu mniejszego.
3. Na płaszczyznę poliniowaną prostymi równoległymi w odległości l rzucamy losowo monetę o promieniu $R, 2R < l$. Wyznacz prawdopodobieństwo tego, że moneta nie dotknie żadnej z prostych.
4. Na odcinku o długości jednostkowej wybrano losowo dwa punkty. Jakie jest prawdopodobieństwo, że odległości pomiędzy nimi jest nie mniejsza od x , gdzie $0 \leq x \leq 1$?