ćwiczenia z rachunku prawdopodobieństwa
matematyka, III rok
lista 4

1. Udowodnić, że prawdopodobieństwo warunkowe spełnia aksjomaty prawdopodobieństwa.

2. Rzucamy trzema kostkami. Jakie jest prawdopodobieństwo, że na żadnej kostce nie wypadła szóstka, jeśli na każdej kostce wypadła inna liczba oczek?

3. Udowodnić, że jeśli $B_1, \ldots, B_n$ są zdarzeniami rozłącznymi, $P(B_i \cap C) > 0$ dla każdego $i = 1, 2, \ldots, n$ oraz $A \cap C \subset \bigcup_{k=1}^{n} B_k$, to
$$P(A|C) = \sum_{k=1}^{n} P(A|B_k \cap C)P(B_k|C).$$

4. Wybieramy losowo jeden ze zbiorów $A = \{1, 2, \ldots, 62\}$ lub $B = \{1, 2, \ldots, 124\}$. Z wybranego zbioru losujemy liczbę x. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że liczba $x^2 + 1$ jest podzielna przez 10.

5. Mamy 5 urn typu A i 7 urn typu B. W każdej z urn typu A jest po 7 kul białych, 3 czarnych i 5 niebieskich, a w każdej z urn typu B: 4 białe, 4 czarne i 7 niebieskich. Z losowo wybranej urny wzięto dwie kule. Obliczyć prawdopodobieństwo wylosowania kul różnokolorowych.

6. W pewnej fabryce maszyny typu A,B,C dają odpowiednio 25 %, 35 % i 40 % produkcji danego wyrobu. Maszyny te produkują odpowiednio 5 %, 4 % i 2 % braków.
   - Obliczyć prawdopodobieństwo, że wylosowano towar dobry.
   - Wylosowano towar dobry. Obliczyć prawdopodobieństwo, że pochodzi on z maszyny B?

7. Pewna choroba występuje w $0,2\%$ ogółu ludności. Przygotowano test do jej wykrycia. Test daje wynik pozytywny u 97% chorych i 1% zdrowych. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana osoba jest chora, jeśli test tej osoby dał wynik pozytywny.

8. Rozporządzamy trzynastoma urnami: $Y_1, \ldots, Y_{13}$, przy czym Y_i zawiera i białych oraz $13 - i$ czarnych kul, $i = 1, \ldots, 13$. Wybieramy jedną z tych urn, przy czym prawdopodobieństwo wybrania każdej z nich jest proporcjonalne do liczby znajdujących się w niej białych kul. Z wybranej urny loujemy dwie kule, które okazują się różnych kolorów. Do której z urn należą z najwięszym prawdopodobieństwem te dwie kule?

zadania do samodzielnego rozwiązania:

1. Rzucamy dwiema kostkami. Jakie jest prawdopodobieństwo, że przynajmniej na jednej kostce wypadła szóstka, jeśli wiadomo, że suma otrzymanych oczek wynosi co najmniej 9?

2. Niech
$$\forall_{1 \leq k \leq n-1}, P(\bigcap_{l=1}^{k} A_l) > 0.$$
Udowodnić, że
$$P(\bigcap_{l=1}^{n} A_l) = P(A_n / \bigcap_{l=1}^{n-1} A_l) \cdot P(A_{n-1} / \bigcap_{l=1}^{n-2} A_l) \cdot \ldots \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_1).$$

3. Udowodnić następujące twierdzenie: Jeśli $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$, dla $i \neq j$ zachodzi $A_i \cap A_j = \emptyset, P(A_k) > 0$ to dla dowolnego B zachodzi wzór:
$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_k)P(B|A_k).$$

4. Udowodnić następujące twierdzenie: Jeśli $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$, dla $i \neq j$ zachodzi $A_i \cap A_j = \emptyset, P(A_k) > 0, P(B) > 0$, to dla dowolnego k zachodzi wzór:
$$P(A_k|B) = \frac{P(A_k)P(B|A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)}.$$

5. Dane są dwie urny A i B. Urna A zawiera 17 kul białych, 3 czarne i 4 niebieskie, zaś urna B 10 białych, 5 czarnych i 15 niebieskich. Rzucamy kostką do gry, a następnie losujemy dwie kule z urny z godnie z następującą regułą: *Jeśli w pierwszym rzucie wypadły jedno lub dwa oczka losujemy z urny A, a jeśli 3,4,5 to z urny B. Natomiast gdy wypadło sześć oczek, to rzucamy ponownie i dokonujemy losowania urny zgodnie z regułą podaną dla pierwszego rzutu kostką z tym, że w przypadku wyrzucenia 6 losujemy również z urny B.* Obliczyć prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul różnych kolorów.