

ćwiczenia z rachunku prawdopodobieństwa  
matematyka, III rok  
lista 5

- Niech zdarzenia  $A, B$  są niezależne. Udowodnić, że są niezależne następujące zdarzenia
  - $A, B'$ ;
  - $A', B$ ;
  - $A, \emptyset$ ;
  - $A, \Omega$ ;
  - $A, B \cup C$  jeśli  $B \cap C = \emptyset$ ,  $A$  i  $C$  są niezależne;
  - $A', B'$ .
- Niech  $P(A/B) = P(A/B')$  oraz  $P(B) > 0, P(B') > 0$ . Udowodnić, że zdarzenia  $A, B$  są niezależne.
- Niech  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_7\}, \Sigma = 2^\Omega, P(\omega_i) = \frac{1}{7}$ . Czy można określić w  $(\Omega, \Sigma, P)$  dwa zdarzenia  $A, B$  niezależne takie, że  $0 < P(A) < 1$  i  $0 < P(B) < 1$ ?
- Podać przykład zdarzeń niezależnych  $A_1, A_2, A_3$  takich, że  $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{2}$ .
- Niech  $A \subseteq B$ ,  $A$  i  $C$  oraz  $B$  i  $C$  są niezależne. Wtedy  $B \setminus A$  i  $C$  są również niezależne.
- Wykaż, że jeśli  $P(A) = a, P(B) = b$ , gdzie  $b \neq 0$ , to  $P(A | B) \geq 1 - \frac{1-a}{b}$ .
- Zbadaj, dla jakich zdarzeń  $A, B$  spełniony jest warunek  $P(A) = \frac{1}{2}(P(A | B) + P(A | B'))$ .
- Co jest bardziej prawdopodobne: wygrać z równorzędnym przeciwnikiem
  - 2 partie z 3, czy
  - 3 partie z 5?
- Ile razy należy rzucić kostką, aby prawdopodobieństwo wypadnięcia "5" było niemniejsze niż  $\frac{1}{2}$ ?
- Z kuli o promieniu  $R$  wylosowano  $N$  punktów. Wyznaczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że odległość od środka kuli do najbliższego położonego punktu jest większa lub równa  $a, 0 < a < R$ .
- Sześciu robotników korzysta z przerwami i niezależnie od siebie z energii elektrycznej. Każdy z nich podłączony jest średnio 8 minut w ciągu godziny. Sieć elektryczna jest przeciążona jeśli co najmniej 5 robotników pobiera energię elektryczną. Obliczyć prawdopodobieństwo przeciążenia sieci.
- (Problem Banacha)** Pewien matematyk nosi w kieszeni dwa pudełka zapalek. Za każdym razem, gdy potrzebuje zapalki, bierze ją z losowo wybranego pudełka. Po pewnym czasie, wybierając jedno z pudełek, stwierdzi on, że jest ono puste. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w tym momencie drugie pudełko będzie zawierało  $k$  zapalek, jeśli na początku każde pudełko zawierało  $n$  zapalek?
- Owad składa  $k$  jajeczek z prawdopodobieństwem  $\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \lambda > 0$ . Potomek wylęga się z jaja z prawdopodobieństwem  $p$ , niezależnie od innych. Znaleźć prawdopodobieństwo, że liczba potomków będzie równa  $l$ .

**zadania do samodzielnego rozwiązania:**

- Rzucamy dwiema kostkami, określając trzy zdarzenia:  $A$  - nieparzysta ilość oczek na pierwszej kostce,  $B$  - nieparzysta ilość oczek na drugiej kostce,  $C$  - nieparzysta suma oczek. Czy zdarzenia  $A, B, C$  są niezależne parami? Czy są niezależne?
- Na odcinku  $[0, 1]$  umieszczamy losowo i niezależnie punkty  $x$  i  $y$ . Niech  $A$  będzie zdarzeniem polegającym na tym, że  $x^2 + y^2 \leq 1$ , natomiast  $B$  zdarzeniem polegającym na tym, że  $x < y$ . Czy zdarzenia  $A$  i  $B$  są niezależne?
- Które ze zdarzeń jest bardziej prawdopodobne:
  - w 4 rzutach kostką wypadnie chociaż raz 6 oczek
  - w 24 rzutach dwoma kostkami chociaż raz wypadnie para (6,6).
- Wiadomo, że w trakcie  $n$  rzutów monetą przynajmniej raz wypadł orzeł. Wyznaczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że liczba orłów jest większa lub równa 2.